Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2013 год

Антон Изосимов

1 Научные результаты

1.1 Устойчивость в интегрируемых системах и алгебраическая геометрия

Ранее мною был предложен бигамильтонов подход к изучению устойчивости в интегрируемых системах. В этом году я обнаружил, что для многих систем более естественным оказывается алгебро-геометрический подход.

Предположим, что интегрируемая система допускает представление Лакса со спектральным параметром

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_\lambda(x) = [\mathcal{L}_\lambda(x), \mathcal{A}_\lambda(x)],$$

где $\mathcal{L}_\lambda(x), \mathcal{A}_\lambda(x)$ матрично-значные функции фазовой переменной x и параметра λ, не входящего в уравнения движения. Известно, что такие системы, как правило, допускают явное решение в терминах тэта-функций римановой поверхности алгебраической[1] функции

$$\det(\mathcal{L}_\lambda(x) - \mu \mathrm{E}) = 0.$$

Идея моей работы состоит в том, что алгебро-геометрическая техника, позволяющая строить тэта-функциональные решения, применима также и для решения топологических вопросов, таких как вопрос об устойчивости движения. В работе [1] я получаю алгебро-геометрические условия устойчивости неподвижных точек.

Пусть $\mathcal{L}_\lambda$ - матрица, полиномиально зависящая от параметра λ, причем существует антиголоморфная инволюция $\tau\colon \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ такая, что $\mathfrak{L}_{\tau(\lambda)} = -\mathfrak{L}_\lambda^*$, где $*$ обозначает эрмитово-сопряженный оператор. Например, если τ - комплексное сопряжение, то это условие означает, что коэффициенты $\mathcal{L}_\lambda$ являются косоэрмитовыми матрицами.

Кривая, заданная в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$\det(\mathcal{L}_\lambda - \mu \mathrm{E}) = 0,$$

называется спектральной кривой. Инволюция τ индуцирует инволюцию $\hat\tau\colon (\lambda, \mu) \to (\tau(\lambda), -\bar\mu)$ на спектральной кривой.

Следующая теорема позволяет восстановить матрицу $\mathcal{L}_\lambda$ по своей спектральной кривой однозначно с точностью до сопряжения.

Теорема 1 (Изосимов [1]). *Предположим, что $\mathcal{L}_\lambda$ - матрица, полиномиально зависящая от параметра λ, причем*

1. *старший член разложения $\mathcal{L}_\lambda$ по λ имеет различные собственные значения;*

[1] Предполагается, что зависимость $L_\lambda(x)$ от λ является алгебраической.

2. *существует антиголоморфная инволюция* $\tau\colon \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ *такая, что* $\mathfrak{L}_{\tau(\lambda)} = -\mathfrak{L}_{\lambda}^{*}$*;*

3. *все неприводимые компоненты спектральной кривой имеют род нуль;*

4. *все особые точки спектральной кривой являются неподвижными точками инволюции* $\hat{\tau}$*.*

Тогда всякая другая матрица $\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda$ *с теми же свойствами и с той же спектральной кривой сопряжена* $\mathcal{L}_\lambda$*:*

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda = Q\mathcal{L}_\lambda Q^{-1}.$$

Поясним на примере, как использовать этот результат для изучения устойчивости. Рассмотрим уравнения движения свободного многомерного твердого тела

$$\dot{M} = [M, \Omega],$$

где $M \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ - динамическая переменная, а Ω определяется из уравнения $M = J\Omega + \Omega J$ с фиксированной симметрической матрицей J. Как показано Манаковым [2], эта система допускает представление со спектральным параметром с $\mathcal{L}_\lambda = M + \lambda J^2, \mathcal{A}_\lambda = \Omega + \lambda J$. Инволюция τ в этом случае имеет вид $\tau(\lambda) = -\bar{\lambda}$.

Рассмотрим точки фазового пространства, для которых существует базис, в котором M имеет вид

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & & & & & \\ -m_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & m_l & & \\ & & & -m_l & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

а матрица J диагональна $J = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Эти точки являются положениями равновесия системы. Спектральная кривая имеет вид

$$\prod_{i=1}^{l} \left(m_i^2 + (a_{2i-1}\lambda - \mu)(a_{2i}\lambda - \mu)\right) \prod_{i=2l+1}^{n} (a_i\lambda - \mu) = 0.$$

Эта кривая – объединение гипербол и прямых линий. В случае, когда все их попарные точки пересечения имеют чисто мнимые координаты, применима теорема 1. Она утверждает, что для всякой кососимметрической матрицы M с такой же спектральной кривой выполнено

$$M + \lambda J^2 = Q(M_0 + \lambda J^2)Q^{-1},$$

откуда $M = M_0$ с точностью до замены знаков чисел m_i. Обозначив за $f_1, \ldots, f_N$ коэффициенты разложения $\det(\mathcal{L}_\lambda - \mu \mathrm{E})$ по λ, μ, заключаем, что множество решений относительно M системы $f_i(M) = f_i(M_0), i = 1, \ldots, N$ конечно, и поскольку функции $f_1, \ldots, f_N$ являются интегралами движения, величина $f(M) = \sum(f_i(M) - f_i(M_0))^2$ является функцией Ляпунова. Тем самым, если все особые точки спектральной кривой имеют чисто мнимые координаты, то положение равновесия является устойчивым. Из бигамильтоновой теории известно, что это условие является также и необходимым для устойчивости. Таким образом, положение равновесия (стационарное вращение) многомерного твердого тела устойчиво тогда и только тогда, когда все особые точки на соответствующей спектральной кривой имеют чисто мнимые координаты. Этот результат становится более наглядным, если сделать замену $x = \mu/\lambda, y = -1/\lambda^2$. Получаем набор парабол и прямых линий

$$y = \frac{(x - a_{2i-1})(x - a_{2i})}{m_i^2}, \quad i = 1, \dots, l.$$
$$y = a_i, \quad i = 2l + 1, \dots, n.$$

Этот набор называется параболической диаграммой вращения. Параболическая диаграмма есть фактор спектральной кривой по инволюции $(\lambda, \mu) \to (-\lambda, -\mu)$. Получаем следующий результат.

Теорема 2 (Изосимов [1])**.** *Стационарное вращение многомерного твердого тела устойчиво тогда и только тогда, когда все точки пересечения на соответствующей параболической диаграмме вещественны и лежат в верхней полуплоскости.*

Более слабый вариант этой теоремы был ранее получен мной при помощи бигамильтонова подхода к устойчивости [3, 4]. Также частные случаи этого результата следуют из работ [5–8].

1.2 Дифференциальная геометрия бигамильтоновых структур

Пусть P, Q - два тензора Пуассона на нечетномерном многообразии M^{2n+1}. Предположим, что выполнены условия

1. тензоры P и Q согласованы, то есть сумма $P + Q$ также является тензором Пуассона,
2. тензоры P и Q находятся в “общем положении”[2], то есть

$$\mathrm{corank}(\alpha P(x) + \beta Q(x)) = 1$$

   для любого x и любых α, β, не равных нулю одновременно.

Легко видеть, что все такие пары приводятся к одному и тому же каноническому виду в точке. Естественный вопрос - можно ли привести такую пару к постоянному виду в окрестности точки? В терминах теории интегрируемых систем этот вопрос можно переформулировать так - всегда ли можно построить координаты, канонические относительно обеих скобок? Как известно из работ Гельфанда и Захаревича (см., например, [9]), ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Гельфанд и Захаревич показывают, что категория пуассоновых пар общего положения в $\mathbb{R}^{2n+1}$ изоморфна категории $n + 1$-тканей в $\mathbb{R}^n$ (в смысле Бляшке). При этом пуассонова пара приводится к постоянному виду (такие пары называются плоскими, по аналогии с плоскими метриками) тогда и только тогда, когда соответствующая ткань тривиальна.

Однако, этот критерий не является конструктивным, поскольку построение ткани по пуассоновой паре требует решения уравнений в частных производных. В работах [10, 11] мной указан простой конструктивный критерий “плоскости” пуассоновой пары. В размерности 3 мне удалось построить для пуассоновых пар аналог тензора кривизны, а в произвольной размерности ответ дается в терминах би-инвариантных форм объема. Сформулирую

[2]“Общее положение” взято в кавычки, поскольку пуассоновы пары с таким свойством образуют открытое, но, вообще говоря не всюду плотное множество в пространстве всех пуассоновых пар.

сначала трехмерный результат. Пусть (P, Q) - пара согласованных скобок общего положения в $\mathbb{R}^3$. Определим 2-форму кривизны

$$\Theta = 2 \sum_{\circlearrowleft} \left(\left\{ z, \frac{\operatorname{div}(\operatorname{sgrad}_{\mathbf{q}} z)}{\Delta_z} \right\}_{\mathbf{p}} - \left\{ z, \frac{\operatorname{div}(\operatorname{sgrad}_{\mathbf{p}} z)}{\Delta_z} \right\}_{\mathbf{q}} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

где

1. $\circlearrowleft$ обозначает циклическую перестановку x, y, z;
2. $\operatorname{sgrad}_{\mathbf{p}} z$ и $\operatorname{sgrad}_{\mathbf{q}} z$ - гамильтоновы поля $P\mathrm{d}z, Q\mathrm{d}z$ соответственно;
3. $\operatorname{div} V$ - дивергенция $\sum \partial V^i / \partial x^i$;
4. Δ_z есть

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \{z, x\}_{\mathbf{p}} & \{z, x\}_{\mathbf{q}} \\ \{z, y\}_{\mathbf{p}} & \{z, y\}_{\mathbf{q}} \end{vmatrix};$$

Теорема 3 (Изосимов [10])**.** *Форма Θ не зависит от выбора системы координат x, y, z и обращается в нуль тогда и только тогда, когда пара скобок P, Q является плоской.*

При помощи этой теоремы можно построить много естественных примеров неплоских пуассоновых пар. Например, рассмотрим трехмерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с соотношениями

$$[z, x] = x, [z, y] = ay,$$
$$[x, y] = 0,$$

и какой-нибудь элемент общего положения $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Тогда на $\mathfrak{g}^*$ возникают две согласованные скобки Пуассона - линейная скобка Пуассона-Ли и постоянная скобка с замороженным аргументом ξ. Эти скобки задаются формулами

$$\{f, g\}_{\mathbf{p}}(\psi) = \psi([\mathrm{d}f(\psi), \mathrm{d}g(\psi)])$$

и

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}}(\psi) = \xi([\mathrm{d}f(\psi), \mathrm{d}g(\psi)]).$$

Вычисляя форму кривизны, получаем, что эта пара является плоской для произвольного ξ только если $a = \pm 1$.

Сформулирую теперь многомерный результат. Скажем, что пара (P, Q) является унимодулярной[3], если на M^{2n+1} существует форма объема, сохраняемая как всеми полями, гамильтоновыми относительно P, так и всеми полями, гамильтоновыми относительно Q.

Теорема 4 (Изосимов [11])**.** *Пара скобок P, Q является плоской тогда и только тогда, когда она локально унимодулярна.*

Отмечу, что проверка унимодулярности сводится к проверки совместности системы линейных алгебраических уравнения и проверке замкнутости некоторой 1-формы. В трехмерном случае эта процедура эквивалентна вычислению определенной выше формы кривизны.

[3]Это определение является эквивалентом понятия унимодулярной пуассоновой структуры, введенной Вайнштейном [12]. При этом одна пуассонова структура всегда унимодулярна в окрестности неособой точки, а для пуассоновой пары это, вообще говоря, не так.

Список литературы

[1] A. Izosimov. Algebraic geometry and stability for integrable systems. arXiv: 1309.7659, 2013.

[2] S.V. Manakov. Note on the integration of Euler's equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body. *Functional Analysis and Its Applications*, 10:328–329, 1976.

[3] A. Izosimov. Parabolic diagrams, spectral curves, and the multidimensional tennis racket theorem. arXiv: 1203.3985, 2012.

[4] A. Izosimov. Stability in bihamiltonian systems and multidimensional rigid body. *Journal of Geometry and Physics*, 62(12):2414 – 2423, 2012.

[5] L. Fehér and I. Marshall. Stability analysis of some integrable Euler equations for SO(n). *J. Nonlinear Math. Phys.*, 10(3):304–317, 2003.

[6] A. Spiegler. *Stability of generic equilibria of the $2N$ dimensional free rigid body using the energy-Casimir method.* PhD thesis, University of Arizona, 2006.

[7] I. Caşu. On the stability problem for the $\mathfrak{so}(5)$ free rigid body. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 8:1205–1223, 2011.

[8] P. Birtea, I. Caşu, T. Ratiu, and M. Turhan. Stability of equilibria for the $\mathfrak{so}(4)$ free rigid body. *Journal of Nonlinear Science*, 22:187–212, 2012.

[9] I. Gelfand and I. Zakharevich. Webs, Veronese curves, and bihamiltonian systems. *J. Funkt. Anal.*, 99:150–178, 1991.

[10] Anton Izosimov. Curvature of poisson pencils in dimension three. *Differential Geometry and its Applications*, 31(5):557 – 567, 2013.

[11] A. Izosimov. Local geometry of bihamiltonian structures and invariant volume forms. arXiv:1302.2931, 2012.

[12] A. Weinstein. The modular automorphism group of a poisson manifold. *J. Geom. Phys.*, 23:379–394, 1997.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

2.1 Опубликованные и принятые в печать работы

1. Bolsinov A. and Izosimov A., *Singularities of bi-Hamiltonian systems*, работа принята в Communications in Mathematical Physics.

2. Izosimov A., *Curvature of Poisson pencils in dimension three*, Differential Geometry and its Applications. 2013. Vol. 31. P. 557-567.

2.2 Препринты

3. Izosimov A., *Algebraic geometry and stability for integrable systems*, Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2013. Работа подана в журнал Physica D.

4. Izosimov A., *Local geometry of bihamiltonian structures and invariant volume forms*, Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2013. Работа подана в Journal of Differential Geometry.

5. Izosimov A., *Parabolic diagrams, spectral curves, and the multidimensional tennis racket theorem*, Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2013. Новая версия старой работы, подана в журнал Nonlinearity.

6. Izosimov A., *The derived algebra of a stabilizer, families of coadjoint orbits, and sheets*, Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2013. Новая версия старой работы, подана в Journal of Lie Theory.

3 Участие в конференциях и доклады на семинарах

3.1 Участие в конференциях

1. Конференция “Beyond Toric Integrability”, Лозанна, Швейцария, доклад на тему “Stability for the multidimensional top via algebraic geometry”.

2. Конференция “Finite Dimensional Integrable Systems”, Марсель, Франция, постер на тему “Parabolic diagrams, spectral curves, and stability for the multidimensional rigid body”.

3.2 Доклады на семинарах

1. Geometry & Dynamics Seminar, Университет Тель-Авива, доклад “Algebraic geometry and stability for integrable systems”.

2. Hebrew University topology and geometry seminar, университет Иерусалима, доклад “Algebraic geometry and stability for integrable systems”.

3. Геометрические методы в теории оптимального управления, Мехмат МГУ, доклад “Бигамильтоновы структуры и устойчивость движения”.

4. Современные геометрические методы, Мехмат МГУ, доклад “Представление Лакса и устойчивость движения”.

5. Современные геометрические методы, Мехмат МГУ, доклад “Геометрия тканей и кривизна пуассоновых пучков в размерности три”.

4 Педагогическая деятельность

4.1 Преподавание

В весеннем семестре я вел семинары по курсам “Классическая дифференциальная геометрия”, “Наглядная геометрия и топология” на механико-математическом факультете МГУ, а также преподавал алгебру и читал спецкурс по алгебраическим уравнениям пятой степени на физико-математическом отделении Московского химического лицея. В осеннем семестре я веду семинары по курсам “Классическая дифференциальная геометрия”, “Дифференциальная геометрия и топология” на механико-математическом факультете МГУ, по курсу “Дополнительные главы алгебры и анализа: продолжение” на факультете прикладной политологии ВШЭ, по курсу “Линейная алгебра и математический анализ” на факультете филологии ВШЭ и по курсу “Математическое введение в экономику” факультета истории ВШЭ. Кроме того, я соруковожу семинаром “Современные геометрические методы” на механико-математическом факультете МГУ.

4.2 Научное руководство

1. Константин Алешкин, студент 4ого курса Мехмата МГУ, соруководство.
2. Михаил Тужилин, студент 4ого курса Мехмата МГУ, соруководство.
3. Екатерина Голова, студентка 3ого курса Мехмата МГУ.

4.3 Другое

В октябре я занимался организацией стенда механико-математического факультета МГУ на фестивале науки. Кроме того, я состоял в жюри конкурса научных работ школьников “Ученые будущего”, проводимого в рамках фестиваля науки.

5 Экспертная деятельность

В этом году я писал рецензии для журналов Journal of Geometry and Physics, Journal of Nonlinear Mathematical Physics.