

# Научный отчёт по гранту фонда "Династия"

С.В. ОБЛЕЗИН

14 декабря 2013 г.

## 1 Проведённые исследования

$Q$ -операторы появились в работах Р.Бакстера в начале 1970-х, как важный инструмент для точного решения (диагонализации) некоторых квантовых интегрируемых моделей. С момента своего возникновения, и на протяжении многих лет  $Q$ -операторы Бакстера рассматривались для различных квантовых интегрируемых систем, связанных с (бесконечномерными) аффинными алгебрами  $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$ , а также с их  $q$ -деформациями и с их эллиптическими обобщениями. Новый класс  $Q$ -операторов Бакстера для квантовых (периодических)  $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$ -цепочек Тоды был построен в 1992 году В.Паскье и М.Годеном; помимо прочего, в работе Паскье-Годена была установлена явная взаимосвязь между построенными  $Q$ -операторами Бакстера и (классическими) преобразованиями Бэклунда для периодических  $\mathfrak{gl}_N$ -цепочек Тоды. Несмотря на очевидную важность и эффективность формализма  $Q$ -операторов, вопрос о его теоретико-представленческой интерпретации оставался открытым вплоть до недавнего времени, что, в частности, препятствовало широкому применению операторов Бакстера в классических разделах математики.

В серии недавних (2006-2010) работ, совместных с А.Герасимовым и Д.Лебедевым, нам удалось обобщить конструкцию Паскье-Годена на случаи аффинных алгебр Ли остальных классических серий,  $B_\ell$ ,  $C_\ell$  и  $D_\ell$ , а также построить формализм операторов Бакстера для квантовых открытых цепочек Тоды, связанных с конечномерными алгебрами Ли классического типа. Кроме этого, в 2007 году нами было показано, что  $Q$ -оператор Бакстера для  $\mathfrak{gl}_N$ -цепочки Тоды естественным образом отождествляется с однопараметрическим семейством  $SO_N$ -биинвариантных функций на группе Ли  $GL_N(\mathbb{R})$ , т.е. с производящей функцией элементов сферической алгебры Гекке  $\mathcal{H}(GL_N(\mathbb{R}); SO_N)$ . Замечательным свойством построенных семейств элементов алгебры Гекке является тот факт, что их спектр воспроизводит автоморфные архимедовы  $L$ -функции, задаваемые произведением гамма-функций, что устанавливает непосредственную связь полученной конструкции с теорией автоморфных форм и арифметической геометрией.

В прошедшем году исследования велись в нескольких направлениях, одним из которых было расширение формализма  $Q$ -операторов Бакстера на более широкий класс представлений вещественных конечномерных редуцированных групп Ли, а также их квантовых деформаций. Ключевым доводом для такого рода исследований служит следующее соображение; поскольку цепочки Тоды являются вырождениями более общих частицеподобных интегрируемых моделей, — релятивистских цепочек Тоды, а также систем типа Калоджеро-Мозера и их релятивистских обобщений, предложенных Рудженаарсом, — то естественно предположить, что построенный формализм  $Q$ -операторов Бакстера допустит обобщения на случаи перечисленных систем. Это соображение было успешно реализовано в работе [1]; в частности, в [1] были построены основные структуры формализма  $Q$ -операторов Бакстера для широкого класса частицеподобных квантовых интегрируемых систем, связанных с системами корней типа  $A_\ell$ , решения которых включают в себя симметрические полиномы Макдональда и Джека, а также  $q$ -деформации функций Уиттекера. Основой формализма служат биспектральные пары  $Q$ -операторов Бакстера, рекурсионные операторы, а также разностные уравнения, представляющие условия коммутации построенных операторов с производящими функциями гамильтонианов, задаваемых разностными/дифференциальными операторами, для соответствующих систем. В качестве непосредственного приложения стоит отметить, что построенный в [1] формализм  $Q$ -операторов Бакстера для упомянутых симметрических полиномов над многомерными полями как воспроизводит ряд новых универсальных тождеств и соотношений, так и придаёт новый смысл ранее известным громоздким комбинаторным тождествам.

Результаты [1] являются существенным фундаментом для дальнейших исследований в различных направлениях. Особенно многообещающим представляется развитие формализма  $Q$ -операторов Бакстера в

рамках программы Ленглендса (см. [2]). В частности, интерпретация спектра пар дуальных операторов из [1] в рамках теории представлений групп петель и арифметической геометрии открывает новые рубежи для развития не только формализма  $\mathcal{Q}$ -операторов Бакстера, но и математической физики в целом.

## 2 Опубликованные работы

- [1] *Baxter operator formalism for Macdonald polynomials* (joint with A.Gerasimov and D.Lebedev), Lett. Math. Phys. 2013; DOI 10.1007/s11005-013-0659-9.
- [2] *q-deformed Whittaker functions and the local Langlands correspondence*, available at <http://icerm.brown.edu/materials/Slides/sp-s13-w2>.

## 3 Семинары и конференции

1. Доклад “*q-deformed Whittaker functions and the local Langlands correspondence*” на конференции “Whittaker functions, Schubert calculus and Crystals” в Международном Центре Экспериментальных Математических Исследований (ICERM), Университет Провиденс, март 2013;
2. Доклад “*Whittaker functions, topological field theories and the local Langlands correspondence*” на “Infinite-Dimensional Algebra Seminar” в Массачусеттском Технологическом Институте, март 2013;
3. Доклад “*Baxter operators, topological field theories and the local Langlands correspondence*” на семинаре “Arithmetic Algebraic Geometry” в Йельском Университете, март 2013;
4. Доклад “*Baxter operators, Topological Field Theories, and the Langlands Programme*” на семинаре “Number Theory and Geometry” в Ноттингемском Университете, октябрь 2013;
5. Доклад “*Baxter operators and Macdonald polynomials*” на семинаре “Integrable Systems and Mathematical Physics” в Университете Лавборо, декабрь 2013.

## 4 Работа в научных центрах и международных группах

В прошедшем году наряду с работой в лаборатории теоретической физики ИТЭФ я участвовал в двух зарубежных поездках, целью которых являлось представление и обсуждение моего научного проекта с ведущими зарубежными специалистами, работающими в США и Великобритании.

Первая поездка состоялась в марте, и включала в себя участие в конференции “Whittaker functions, Schubert calculus and Crystals”, проходившей в Международном Центре Экспериментальных Математических Исследований (ICERM) в г. Провиденс (Род Айленд), а также выступления на семинарах в Массачусеттском Технологическом Институте в Кембридже (Бостон, Массачусетс) и на математическом департаменте Йельского Университета в Нью-Хейвене (Коннектикут). Выбор мест проведения семинаров позволил охватить широкий круг признанных экспертов в областях, тесно связанных с проводимыми мною исследованиями. Помимо многочисленных плодотворных обсуждений научных результатов, представленных мной на конференции и семинарах, в течение поездки у меня состоялись ряд весьма интересных и полезных бесед с Р.Безрукавниковым (Кембридж), Б.Гроссом (Гарвард), А. Гончаровым (Йель), а также с Т.Ламом (Мичиган), С.Сахи (Ратгерс) и А.Шиллинг (Дейвис).

Вторая поездка проходила с середины октября по середину декабря, и включала в себя подробные обсуждения моего научного проекта с И.Фесенко (Ноттингем), К.Красновым (Ноттингем), а также с А.Веселовым (Лавборо) и М.Мазокко (Лавборо). В ходе поездки мною были сделаны два доклада (см. Раздел 3), а также прочитана серия лекций “*Baxter operators in Representation theory and in Number Theory*” в Ноттингемском университете.

## 5 Педагогическая деятельность

В прошедшем году я принимал участие в научной работе студента 6-го курса МФТИ А.Зыкова, а также аспиранта ИТЭФ П.Султанича. В течение моего пребывания в Ноттингемском университете, я участвовал в работе тематических семинаров для аспирантов, и прочитал серию лекций о своей исследованииельской работе (см. предыдущий раздел).