ОТЧЕТ

Пржиялковского Виктора Владимировича
по программе Фонда “Династия”

1. Результаты, полученные в 2013 году

Для начала напомню контекст, в рамках которого были получены результаты 2013 года.

Феномен зеркальной симметрии описывает двойственность между алгебро-геометрическими свойствами одного многообразия или пучка многообразий и симплектическими свойствами другого (“двойственного многообразия”), и наоборот, алгебро-геометрическими свойствами двойственного многообразия с симплектическими свойствами исходного. Пришедшая в математику из физики в конце 1980-х годов, зеркальная симметрия превратилась в ряд гипотез, формулирующих двойственность в различных терминах. Наиболее распространенной и разработанной гипотезой зеркальной симметрии являются гомологическая зеркальная симметрия, описывающая двойственность в терминах производных категорий. Ее численное следствие (в частности, для многообразий Фано) — гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа — заключается в совпадении некоммутативных структур Ходжа, получающихся из соответствующих категорий (категории Фукая многообразия и категории особенностей двойственного объекта, называемого моделью Ландау–Гинзбурга). Эта гипотеза позволяет во многих случаях эффективно с ней работать. А именно, она позволяет, во многих примерах, восстанавливать (или, точнее, предсказывать) многие численные инварианты многообразий Фано, а также их бирациональные перестройки друг в друга.

Кратко опишем, что мы понимаем под этой гипотезой. Рассмотрим гладкое многообразие Фано X размерности N и многочлен Лорана f от N переменных $x_1, \ldots, x_N$. Обозначим через $I^X_{H^0}$ свободный (относительно когомологий) член регуляризованного производящего ряда одноточечных инвариантов Громова–Виттена для X. Этот ряд является решением регуляризованного квантового дифференциального уравнения для X. Обозначим также через $\phi_f(i)$ свободный член (коэффициент при $x_1^0 \cdot \ldots \cdot x_N^0$) многочлена f^i, и определим *ряд свободных членов* для f как ряд

$$\Phi_f = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_f(i) \cdot t^i.$$

Этот ряд является периодом семейства гиперповерхностей в торе, задаваемого многочленом f.

Определение. Многочлен Лорана f называется *торической моделью Ландау–Гинзбурга* для многообразия X если

- (Условие периодов) Ряды $I^X_{H^0}$ и Φ_f совпадают с точностью до линейной замены переменных.
- (Условие Калаби–Яу) Существует послойная компактификация семейства

  $$f\colon (\mathbb{C}^*)^N \to \mathbb{C},$$

  тотальное пространство которой является (не компактным) гладким многообразием Калаби–Яу $LG(X)$. Такая компактификация называется *компактификацией Калаби–Яу.*

- (Торическое условие) Существует вложенное вырождение $X \rightsquigarrow T$ к торическому многообразию T, веерный многогранник которого (то есть выпуклая оболочка целочисленных порождающих лучей веера многообразия T) совпадает с многогранником Ньютона (то есть выпуклой оболочкой ненулевых коэффициентов) многочлена f.

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа заключается в том, что каждое гладкое многообразие Фано имеет (хотя бы одну) торическую модель Ландау–Гинзбурга.

На изучение связей торических моделей Ландау–Гинзбурга многообразий Фано и геометрии самих этих многообразий и направлен настоящий проект. Для простоты приведу результаты этого года, разбив их на три направления, представленные в заявке.

1.1. **Проектирование многообразий Фано в зеркале.** Это большой проект, совместный с Л. Кацарковым и Д. Саковичем, начатый в прошлом году. В этом году к нему присоединился А. Каспрчик. Предполагается, что первая версия препринта по этому проекту выйдет в первой половине следующего года. Напомню, что совместно с Л. Кацарковым и И. Чельцовым мною были определены так называемые *базовые линки* — бирациональные преобразования специального вида, связывающие специальные торические вырождения многообразий Фано. Эти линки имеют явный геометрический смысл (они описываются как проекции в антиканоническом вложении) и, в частности, по аналогии с поверхностями дель Пеццо, позволяют довольно просто описать классификацию многообразий Фано. Кроме того, они позволяют получить новую информацию о бирациональных перестройках этих многообразий и, гипотетически, позволяют получить классификацию многообразий Фано в высших размерностях или имеющих некоторый класс особенностей (например, канонические горенштейновы). Нами было построено дерево таких базовых линков, связывающее трехмерные многообразия Фано основной серии (“Fano snake”)и поставлен вопрос об описании “хорошего” подобного дерева, связывающего все трехмерные многообразия Фано. Такое дерево, конечно, не единственно; кроме того, оно зависит то того, что от него требовать: “хорошие” свойства одного типа не позволяют построить дерево, обладающее “хорошими” свойствами другого типа. Тем не менее в рамках проекта нами было построено такое дерево, которое в данный момент и изучается. В частности, нами получено, что все антиканонически вложенные трехмерные многообразия Фано получаются как сглаживания торических проекций пяти “максимальных” многообразий Фано, таких как $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или трехмерная квадрика.

Другой подход к описанию множества семейств гладких трехмерных многообразий Фано в виде некоторого дерева связан со взвешенными раздутиями. Напомню, что в торическом случае взвешенное раздутие описывается как некоторое специальное добавление вершины к веерному многограннику. Таким образом, все веерные многогранники некоторого класса торических многообразий (а именно, горенштейновых; соответствующие многогранники называются *рефлексивными*, то есть такими, двойственные многогранники которых также целочисленны) получаются из небольшого количества “минимальных”. Более того, если некоторые многогранники связать некоторым естественным условием эквивалентности (связанным с вырождением многообразий), то такой многогранник, по крайней мере в малых размерностях, всего один. Дерево, построенное с помощью таких взвешенных раздутий, не имеет столь простой геометричской интерпретации, как дерево проекций, однако оно более естественно с точки зрения торической геометрии. Кроме того, его проще описать с точки зрения некоммутативных структур Ходжа, соответствующих торическим вырождениям многообразий. Оказывается, полученные два типа деревьев многообразий Фано похожи, и представляет интерес их сравнение: это позволит связать геометрический и вариационный подходы к описанию структуры множества семейств трехмерных многообразий Фано.

Остается добавить, что вершины построенных деревьев соответствуют моделям Ландау–Гинзбурга соответствующих многообразий Фано, а ребра — вырождениям в пространстве модулей таких моделей. Это позволяет связать полученную картину с бирациональными перестройками многообразий Фано и с их арифметическими свойствами. Такие связи изучаются, в частности, в рамках следующего проекта.

1.2. **Модулярность трехмерных многообразий Фано.** Этот проект, совместный с Ч. Дораном, Л. Кацарковым, Дж. Льюисом и А. Хардером, тесно связан с предыдущим проектом. Мы надеемся опубликовать препринт с результатами этого проекта в конце этого или начале следующего года. Напомним, что слоями компактифицированных торических моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано, согласно условию Калаби–Яу, являются поверхности типа K3. Кроме того, согласно общей концепции зеркальной симметрии, эти поверхности должны быть двойственны по Долгачеву–Никулину антиканоническим сечениям исходного многообразия. Иными словами, их решетка Нерона–Севери должна совпадать с решеткой трансцендентных циклов двойственной поверхности и наоборот. Это накладывает сильные модулярные условия на модели Ландау–Гинзбурга. Так, в прошлом году нами было показано, что оно выполняется для найденных мною торических моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано основной серии. В частности, из этого следует единственность, с точностью до флопов, компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга, а также модулярность их периодов.

В случае трехмерных многообразий Фано большего ранга торическая модель Ландау–Гинзбурга не единственна: такие модели варьируются в семействе, размерность которого на единицу меньше ранга многообразия Фано. Однако (обобщенные) модулярные свойства моделей сохраняются. Кроме того, арифметика этих семейств (связанная с решетками поверхностей типа K3, из которых они состоят, а также с расположением их вырожденных слоев) определяет геометрию исходного многообразия Фано. Кроме того, компоненты границы пространства модулей (“вырожденные модели Ландау–Гинзбурга”) соответствуют бирациональным преобразованиям многообразий Фано или их торических вырождений, таким как экстремальные стягивания. Такой подход позволяет получить новый, зеркальный взгляд на программу минимальных моделей.

Полного описания пространств модулей моделей Ландау–Гинзбурга всех трехмерных многообразий Фано нами еще не получено. Однако построено большое количество примеров, как торических, так и не торических, демонстрирующих как арифметический подход, так и подход, связанный с программой минимальных моделей.

Одним из приложений такого подхода является обобщение следующей теоремы, сформулированной в совместной работе с Л. Кацарковым и являющейся легким следствием установления В. А. Исковских (не)рациональности трехмерных многообразий Фано основной серии, вычисления В. В. Голышевым монодромии моделей Ландау–Гинзбурга и их единственности, обсуждающейся выше. А именно, слои таких моделей, за исключением, возможно, одного, неприводимы; один же слой обычно состоит из большого числа компонент (речь о нем пойдет в третьей части проекта). Монодромия вокруг этого слоя всегда квазиунипотентна. Оказывается, она унипотентна тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие Фано рационально. Описание пространств моделей Ландау–Гинзбурга для многообразий любого ранга позволяет сформулировать аналогичный признак рациональности и для них (его конкретную формулировку мы планируем получить в декабре).

1.3. **Зеркальная симметрия вариаций структур Ходжа.** Это направление посвящено восстановлению численных инвариантов многообразий Фано (а именно, чисел Ходжа) их их моделей Ландау–Гинзбурга. В его рамках мною совместно с К. А. Шрамовым опубликован препринт "On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models" (arXiv:1305.4377).

Напомним, что сам термин "зеркальная симметрия" возник из-за совпадения ромба Ходжа многообразия Калаби–Яу и повернутого на 90 градусов ("зеркально отраженного") ромба Ходжа двойственного многообразия Калаби–Яу. Недавно Л. Кацарков, М. Концевич и Т. Пантев определили адаптированные числа Ходжа — аналог чисел Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга (препринт должен выйти в декабре). Согласно их гипотезе, построенный по таким числам ромб Ходжа совпадает с ромбом Ходжа исходного многообразия Фано. В частности, рассмотрим многообразие Фано X размерности N и его модель Ландау–Гинзбурга $f\colon LG(X)\to\mathbb{C}$. Тогда адаптированное число Ходжа $h^{11}_f(LG(X))$ определяет размер Жордановых блоков монодромии семейства слоев модели Ландау–Гинзбурга вокруг бесконечности. Эта монодромия, в свою очередь, переписывается в терминах монодромий конечных особых слоев. В итоге гипотеза Кацаркова–Концевича–Пантева сводится к следующему. Пусть $k_{LG(X)}$ — число компонент приводимых слоев (без кратности) минус число таких слоев. Тогда $k_{LG(X)} = h^{1,N-1}(X)$.

Эта гипотеза была проверена мною для трехмерных многообразий Фано основной серии (препринт был опубликован еще в 2009 году, однако статья вышла только в этом). Для полных пересечений модели Ландау–Гинзбурга были предложены Хори и Вафой. Их можно переписать в терминах многочленов Лорана и показать, что они являются торическими моделями Ландау–Гинзбурга. Мы с К. А. Шрамовым в своем препринте показали, что гипотеза Кацаркова–Концевича–Пантева выполнена и для них. Наше доказательство во многом вычислительно-комбинаторное. Однако оно позволяет увидеть дополнительную структуру на компонентах центрального слоя. Что она означает в терминах Ходжевых классов исходного полного пересечения, остается пока неясным.

2. Список работ

- I. Cheltsov, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, "Birational geometry via moduli spaces", Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons symposium 2012, Springer, 2013, 93–132.
- N. O. Ilten, J. Lewis, V. Przyjalkowski, "Toric degenerations of Fano threefolds giving weak Landau–Ginzburg models", J. Algebra, 374 (2013), 104–121.
- В. В. Пржиялковский, "Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано", Изв. РАН. Сер. матем., 77:4 (2013), 135–160.
- A. Iliev, L. Karzarkov, V. Przyjalkowski, "Double solids, categories and non-rationality", Proceedings of EMS, 2014 (принята к печати), arXiv: 1102.2130.

- V. Przyjalkowski, C. Shramov, “On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models”, 2013 (подано в печать), arXiv: 1305.4377.

3. Участие в научных конференциях

Я участвовал, в частности, в следующих конференциях:

- Conference on Homological Mirror Symmetry, Майами, США, 28 января – 1 февраля.
- Third Latin Congress on Symmetries in Geometry and Physics, Сан–Луис, Бразилия, 4–10 февраля, с докладом “Mirror symmetry for Fano threefolds: modularity, projections, variations”.
- Symposium on projective algebraic varieties and moduli, Юсу, Корея, 18–21 февраля.
- Locally free geometry seminar, Мадрид, Испания, 8 марта, с докладом “Mirror symmetry for Fano threefolds: modularity, projections, variations”.
- Международная конференция, посвященная 90-летию И. Р. Шафаревича, МИАН, Россия, 3–5 июня (организатор).
- Девятая ежегодная Лунцевская конференция, Григоровка, Россия, 8–13 июля.
- Locally free geometry seminar, Бухарест, Румыния, 13–14 сентября, с докладом “Hodge numbers of Fano varieties via Mirror Symmetry”.
- Quantum and motive cohomology, Fano varieties, and Mirror Symmetry, Санкт–Петербург, Россия, 26–29 сентября, с докладом “Hodge numbers of Fano varieties via Mirror Symmetry”.
- Международная конференция “Геометрия алгебраических многообразий”, посвященная памяти В. А. Исковских, МИАН, Россия, 22–25 октября (организатор).

4. Работа в научных центрах и международных группах

Я активно сотрудничаю с Венским Университетом.

5. Педагогическая деятельность

Я являюсь соруководителем семинара Исковских (МИАН–МГУ). Также я являюсь организатором двух конференций: международной конференции, посвященной 90-летию академика И. Р. Шафаревича (МИАН, 3–5 июня 2013 г.) и международной конференции “Геометрия алгебраических многообразий”, посвященной памяти В. А. Исковских (МИАН, 22–25 октября 2013 г.).