Отчет по гранту фонда Династия за 2013 год

Владлен Тиморин

Результаты, полученные в этом году

В совместной работе с А.Г. Хованским построена теория ковыпуклых тел, содержащая аналоги известных результатов про выпуклые тела. Ковыпуклым телом называется органиченное множество, являющееся дополнением до замкнутого выпуклого подмножества замкнутого выпуклого конуса без вершины. Основным результатом является представление ковыпуклого тела в виде виртуального выпуклого тела (взятого со знаком минус). Это представление позволяет переносить многие результаты теории выпуклых тел на ковыпуклые тела почти автоматически. Например, таким образом получаются ковыпуклые аналоги классических неравенств Александрова–Фенхеля, мотивированные коммутативной алгеброй и теорией особенностей. Частный случай этого результата был ранее опубликован Ф. Филластром, при этом мотивировки автора были совсем другими — а именно, он рассматривал геометрию дискретных групп изометрий классических гиперболических пространств. Мы перенесли на ковыпуклые тела утверждения про полиномиальность числа целых точек, выражение для значения многочлена Эрхарта в -1 и проч.

В совместной работе с А. Блохом, Л. Оверстигеном и Р. Птачеком (продолжающей указанные ниже препринты) изучается комбинаторная структура пространства кубических инвариантных ламинаций. Инвариантные ламинации в диске были введены Терстоном для описания топологической динамики многочленов с локально связными множествами Жюлиа (*ламинация* — это просто замкнутое семейство хорд единичного диска, не пересекающихся внутри диска; эти хорды называются *листами ламинации*; свойства инвариантности связано с отображением $\sigma_d : z \to z^d$ на единичной окружности). В случае степени 2, инвариантные ламинации позволяют описать комбинаторную модель множества Мандельброта (знаменитая гипотеза MLC эквивалентно утверждению про гомеоморфность множества Мандельброта и его комбинаторной модели). Важное утверждение, позволяющее описать комбинаторную структуру пространства квадратичных инвариантных ламинаций и построить комбинаторную модель множества Мандельброта, состоит в следующем: критические четырехугольники различных квадратичных инвариантных ламинаций не могут быть сторого зацеплены (четырехугольник *критический*, если его 4 вершины имеют только два разных образа относительно σ_2; два четырехугольника *строго зацеплены*, если их вершины перемежаются на единичной окружности). В случае кубической ламинации, вместо критического четырехугольника следует рассматривать пару, состоящую из двух критических четырехугольников или одного критического четырехугольника и одного листа. Мы доказали результат про незацепленность таких пар. Впрочем, имеется важный (хотя и очень узкий) класс кубических ламинаций, которые являются зацепленными. Трудность изучения комбинароной структуры кубических ламинаций во многом связана именно с этим классом.

В совместной работе с А. Пахаревым (студент бакалавриата факультета математики НИУ ВШЭ, 3 курс) мы рассматриваем произведение четырехмерных решеток в теле кватернионов, нацеливаясь на построение и изучение некоммутативных аналогов группы классов идеалов. Мы пришли к следующему определению групп кватернионных решеток, которое кажется нам правильным: пусть H — алгебра Гурвица, т.е. ассоциативная композиционная алгебра с единицей, над полем $\mathbb{R}$, например, алгебра кватернионов, а $E \subset H$ — решетка полной размерности в H, такая, что $EE = E$ (то есть E является подкольцом) и $\overline{E} = E$. Мы определяем группу решеток $\mathrm{Lat}(E)$ как множество решеток L полной размерности в H, таких, что $EL = LE = L$ (т.е. L является двусторонним E-модулем) и $L\overline{L} = \overline{L}L = E$. Произведение решеток L и M определяется как аддитивная подгруппа в H, порожденная всеми попарными произведениями xy, где $x \in L$ и $y \in M$. То, что $\mathrm{Lat}(E)$ является группой относительно произведения решеток, практически очевидно. Например, если E — кольцо целых квадратичного поля $K \subset \mathbb{C}$, то группа $\mathrm{Lat}(E)$ изоморфна прямому произведению группы классов кольца E и окружности $SU(1)$. В случае кватернионных решеток многие группы $\mathrm{Lat}(E)$ оказываются конечными. Интересные конечные группы, например, $PGL_2(\mathbb{F}_p)$, могут быть реализованы как подгруппы в группах кватернионных решеток.

Опубликованные в 2013 году работы

1. Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V., *Dynamical cores of topological polynomials*// Proceedings of the International Conference “Frontiers in Complex Dynamics” celebrating J. Milnor’s 80th Birthday, Princeton University Press (2013)

2. Ghys E., Tabachnikov S., Timorin V., *Osculating Curves: Around the Tait-Kneser Theorem* // The Mathematical Intelligencer. (2013) Vol. 35. No. 1. P. 61–66.

3. Kiritchenko V., Timorin V., Gusev P., *Counting vertices in Gelfand-Zetlin polytopes* // Journal of Combinatorial Theory, Series A. (2013) Vol. 120. P. 960–969.

Препринты:

1. Timorin V. A., Khovanskii A. G. *On the theory of coconvex bodies* // preprint at "arxiv.org"(2013) No. 1308.1781. Submitted.

2. Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., Timorin V., *The Main Cubioid* // preprint at "arxiv.org". (2013) No. 1305.5798. Submitted.

3. Timorin V. A., Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., *Laminations from the Main Cubioid* // preprint "arxiv.org". (2013) No. 1305.5788. Submitted.

4. Timorin V. A., Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., *Quadratic-like dynamics of cubic polynomials* // preprint "arxiv.org". (2013) No. 1305.5799.

5. Timorin V. A., Khovanskii A. G. *Aleksandrov-Fenchel inequality for coconvex bodies* // preprint "arxiv.org". (2013) No. 1305.4484.

6. Timorin V. A., *Disquisitiones 235* // preprint at "arxiv.org". (2013) No. 1309.4879.

Участие в конференциях и школах

январь Christmas meetings with Pierre Deligne, Рождественские встречи фонда «Династия» 8.01.2013 – 11.01.2013 Российская Федерация, Москва

февраль зимняя школа НИУ-ВШЭ по математике, 1.02.2013 – 5.02.2013 Голицыно, МО, Российская Федерация

февраль Российско-японская зимняя школа, 13.01.2013 – 2.02.2013 Российская Федерация, Москва

июнь ICTP-SISSA-Moscow School on Geometry and Dynamics, 3.06.2013 – 14.06.2013 Италия, Триест

Доклады на семинарах:

- семинар по группам Ли и теории инвариантов, МГУ
- коллоквиум МИАН
- семинар по динамическим системам, Universite Aix Marseille

Работа в научных центрах и международных группах

Совместный проект с коллегами из университета Алабамы в Бирмингеме. Кстати, в этом году группа распределилась более равномерно между Бирмингемом и Москвой: Росс Птачек приехал в Москву постдоком.

Педагогическая и административная деятельность

Я преподаю на факультете математики Высшей Школы Экономики. В этом году, я читал следующие курсы:

1. Holomorphic dynamics (спецкурс для англоязычной магистратуры НИУ ВШЭ)

2. Complex Analysis (совместный курс англоязычной магистратуры НИУ ВШЭ по математике и программы Math in Moscow)

3. History of Mathematics (курс англоязычной магистратуры НИУ ВШЭ)

4. Experimental Mathematics (курс англоязычной магистратуры НИУ ВШЭ)

Кроме того, я вел учебные семинары по динамическим системам (лагранжева механика и введение в геометрию гладких многообразий) на 2 курсе. Я являюсь заместителем декана факультета математики по международным связям. С этой должностью связана существенная административная нагрузка.

Я руковожу курсовыми и выпускными квалификационными работами пяти студентов бакалавриата и магистратуры.