

Для фонда Дмитрия Зимина «Династия»  
Отчет за 2013 год  
Конкурс молодых математиков – подпрограмма 2.1

Зотов Андрей Владимирович

«Уравнения Пенлеве-Шлезингера, интегрируемые системы и конформные теории поля»

**1. Результаты, полученные в этом году.**

- 1.1 Спектральная дуальность для XXZ цепочек описана в терминах преобразования Фурье уравнений Бакстера. Последние реализованы как квантовые версии спектральных кривых. При этом показано, что отвечающие спектральным кривым разностные операторы совпадают с выбором нормального упорядочения квантования фазового пространства. В предельном случае воспроизводится полученная нами ранее дуальность между системами Годена и спиновыми XXX цепочками Гейзенберга. Попутно обнаружена эквивалентность тригонометрических и частичных редукций рациональных моделей Годена. Обе системы реализуются как редукции рациональной системы с разными фиксациями действия калибровочной группы и, как следствие, разными же редуцированными пуассоновыми структурами. Линейная скобка Пуассона-Ли в тригонометрическом случае связана треугольным калибровочным преобразованием с квадратичной пуассоновой структурой для частично редуцированного рационального случая.
- 1.2 Построено семейство уравнений изомонодромных деформаций на эллиптической кривой, отвечающих  $SL(N, C)$ -расслоениям с нетривиальными характеристическими классами. Такая ситуация имеет место, когда  $N$  является составным числом:  $N=nr$ . Соответствующие классические интегрируемые системы представляют собой набор  $n$  взаимодействующих  $GL(r, C)$  волчков (или наоборот). Показано, что квантование такой системы описывается новой эллиптической динамической  $R$ -матрицей. Она является промежуточным звеном между нединамической  $R$ -матрицей Бакстера-Белавина-Дринфельда и динамической  $R$ -матрицей Фельдера, которые воспроизводятся в частных случаях – при  $n=1$  и  $n=N$  соответственно.
- 1.3 Было показано, что инволютивность интегралов движения в двойной эллиптической интегрируемой системе основана на тождествах на  $t$ -функции старших родов. Такие тождества исследовались и проверялись нами в случае рода 2, отвечающего системе трех частиц. В частном случае их вырождение приводит к известным тождествам Макдональда. Пары Лакса изучались для  $p$ - $q$  двойственных систем в случае одной степени свободы. В частности, показано, что в лагранжевых переменных они имеют особенно простой вид, допускающий обобщение на двойной эллиптический случай.
- 1.4 Описан новый класс уравнений нулевой кривизны, объединяющий полевые обобщения систем Хитчина и изомонодромные деформации. В отличие от двумеризации связанной с обратной задачей рассеяния, полученные уравнения являются неавтономными. Такие неавтономные теории поля обобщают уравнения типа Пенлеве-Шлезингера с одной стороны и системы Хитчина бесконечного ранга на кривых с проколотыми точками с другой. Нами построены явные примеры и уравнения в случае эллиптической кривой с отмеченными точками. Особое внимание уделяется рангу 2 и четырем точкам, когда в механическом пределе уравнения переходят в Пенлеве VI.

## 2. Опубликованные и поданные в печать работы.

- 2.1 A. D. Mironov, A. Yu. Morozov, Y. Zenkevich, A. V. Zotov, "Spectral duality in integrable systems from AGT conjecture", *Письма в ЖЭТФ*, **97**:1 (2013), 49–55 [Math-Net.Ru](#) [crossref](#) [eLIBRARY.RU](#); *JETP Letters*, **97**:1 (2013), 45–51 [crossref](#) [ads\\*](#) [ISI Web of Knowledge\\*](#)
- 2.2 A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, "Spectral duality between Heisenberg chain and Gaudin model", *Lett. Math. Phys.*, **103**:3 (2013), 299-329 [crossref](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) [ads\\*](#) [ISI Web of Knowledge\\*](#)
- 2.3 A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, "Characteristic classes of  $SL(N, \mathbb{C})$ -bundles and quantum dynamical elliptic  $R$ -matrices", *J. Phys. A*, **46**:3 (2013), 035201, 25 pp. [crossref](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) [ads\\*](#) [ISI Web of Knowledge\\*](#)
- 2.4 А. В. Зотов, А. В. Смирнов, "Модификации расслоений, эллиптические интегрируемые системы и связанные задачи", *ТМФ*, **177**:1 (2013), 3–67 [Math-Net.Ru](#) [crossref](#); A. V. Zotov, A. V. Smirnov, "Modifications of bundles, elliptic integrable systems, and related problems", *Theoret. and Math. Phys.*, **177**:1 (2013), 1281–1338 [crossref](#)
- 2.5 G. Aminov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, "Three-particle integrable systems with elliptic dependence on momenta and theta function identities", *Phys. Lett. B*, **726**:4-5 (2013), 802–808, arXiv: [1307.1465](#) [crossref](#) [MathSciNet](#) [ads\\*](#)
- 2.6 A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, "Spectral duality in XXZ chains and five dimensional gauge theories", arXiv: 1307.1502, accepted for publication in JHEP
- 2.7 G. Aminov, S. Arthamonov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Painleve Field Theory", arXiv: 1306.3265.

## 3. Участие в конференциях и школах.

- 3.1 Доклад "Голоморфные расслоения, интегрируемые системы и связанные задачи", семинар "Комплексные задачи математической физики", МИАН, 18 марта 2013
- 3.2 Доклад "Теоретико-групповой подход к интегрируемым системам", семинар по квантовой теории поля, ГУ ВШЭ, 4 апреля 2013
- 3.3 Доклад "Классическо-квантовое соответствие для уравнений Пенлеве", семинар "Комплексные задачи математической физики", МИАН, 22 апреля 2013
- 3.4 Доклад "Algebraic Bethe ansatz for quantum spin chains via classical many-body systems", конференция « Synthesis of integrability in the context of duality between the string theory and gauge theories - 2013», 09-13.09.2013, ГУ ВШЭ
- 3.5 Доклад "Спектральные дуальности в интегрируемых системах", Научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов 2013 года, 20 ноября 2013 г.

3.6 Доклад "Квантово-классические дуальности в интегрируемых системах и связанные задачи", Семинар Лаборатории 5 ИППИ РАН «Интегрируемые структуры в статистических и полевых моделях», 5 декабря 2013 г.

#### **4. Работа в научных центрах и международных группах.**

ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН (сентябрь 2013): участие в проекте «Квантовая теория поля и интегрируемые модели», программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

#### **5. Педагогическая деятельность.**

5.1 Курс «Теория групп и представлений», Московский физико-технический институт, Факультет общей и прикладной физики, кафедра «Теоретическая астрофизика и квантовая теория поля», 2-ой курс, весенний семестр 2013

5.2 Научное руководство: Б. Рунов (МФТИ, 5-ый курс), А.Кошелев (МИФИ, 3-ий курс).

5.3 Продолжена работа с аспирантами Г.Аминовым, С.Артамоновым и Е.Зинкевичем. По результатам опубликован ряд совместных работ.

А.В. Зотов

12 декабря 2013 г.