Отчет по гранту фонда "Династия" за 2014 год

Ю. Белов

1. Результаты, полученные в 2014 году.

1.1. **Синтезируемые подпространства оператора дифференцирования в $C^\infty(a,b)$.** В совместной работе с А. Барановым (готовится к печати) получено описание *всех синтезируемых* подпространств оператора дифференцирования. В 2008 году А. Алеман и Б. Коренблюм поставили следующий вопрос:

Верно ли, что любое инвариантное подпространство L оператора D ($= \frac{d}{dx}$) такое, что спектр $\sigma(D|_L)$ дискретен, порождается своей резидуальной частью $L_{res} = \cap_{P-\text{полином}\neq 0} P(D)(L)$ и собственными (корневыми) векторами, лежащими в L?

В предыдущей работе (совместной с А. Алеманом и А. Барановым) был получен отрицательный ответ на этот вопрос и приведены некоторые достаточные условия синтезируемости спектра (существования единственного инвариантного подпространства с тем же спектром и резидуальной частью). В новой работе удалось полностью описать все синтезирумые спектры. Ниже $R(\Lambda)$ означает радиус полноты последовательности Λ, а I - резидуальный интервал ($L_{res} = L_I := \{f \in C^\infty(a,b) : f\big|_I \equiv 0\}$).

Теорема *Спектр Λ синтезируем тогда и только тогда, когда $R(\Lambda) < |I|$ или $R(\Lambda) = |I|$ и выполнены следующие два условия:*

(1) *произведение $G(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$ сходится в смысле главного значения;*
(2) *полиномы лежат в пространстве $L^2(|G|)$ и их замыкание имеет коразмерность не выше одного.*

Отметим, что если $R(\Lambda) > |I|$, то инвариантное подпространство тривиально ($= C^\infty(a,b)$).

Оказывается, что структура инвариантных подпространств в случае критической плотности ($R(\Lambda) = |I|$) тесно связана с теорией пространств де Бранжа. В частности, все инвариантные подпространства с совпадающим спектром и резидуальной частью упорядочены по включению.

1.2. **Единственность ряда Фурье, построенного по системе Габора.** В работе [3] доказано, что коэффициенты Фурье по любой полной и минимальной системе Габора ($\mathcal{G}_\Lambda = \{e^{2\pi i y t} e^{-\pi(t-x)^2}\}_{(x,y)\in\Lambda}$) однозначно определяют любую функцию из $L^2(\mathbb{R})$.

1.3. **Пространства де Бранжа и канонические системы.** Пусть $Y(t,z)$ - (единственное) решение системы

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(t,z) J = z Y(t,z) H(t),\ t \in [0,L], \qquad Y(0,z) = Id, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричная (2×2) функция H - Гамильтониан системы ($H \geq 0$, $trH \equiv 1$). Положим $(A_t(z), B_t(z)) := (1,0)Y(t,z)$, $t \in [0,L]$, и $E_t(z) := A_t(z) - iB_t(z)$.

Тогда функция E - функция класса Эрмита-Билера. Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ соответствует Гамильтониану H. Если $\mathcal{H}(E)$ изометрически вкладывается в $L^2(\mu)$, то говорят, что μ - спектральная мера канонической системы. Один из фундаментальных результатов теории де Бранжа состоит в том, что *любая* мера, суммируемая с весом $(1+x^2)^{-1}$, порождает цепочку подпространств де Бранжа (канонических систем), изометрически вложенных в $L^2(\mu)$, причем эта цепочка плотна в $L^2(\mu)$.

Один из известных классических вопросов - как определить экспоненциальный тип цепочки (супремум типов подпространств) по спектральной мере μ. Этим вопросом занимались многие специалисты, начиная с М. Крейна и заканчивая недавними результатами А. Полторацкого.

Другой близкий к этому вопрос - *регулярность* цепочки. Мне удалось показать, что при некоторых условиях регулярности меры (заведомо гарантирующих бесконечный тип) цепочка растет регулярно, то есть если два подпространства в цепочке имеют один тип, то они совпадают. Работа готовится к печати.

1.4. **Дополняемость систем из экспонент.** В работе [4] получен положительный ответ на следующий вопрос, поставленный А. Накамурой в 2007 году: *Верно ли, что любую неполную систему из экспонент* $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ *в* $L^2(-\pi,\pi)$ *можно дополнить до полной и минимальной системы из экспонент.* Отметим, что для последовательностей Рисса отрицательный ответ был получен К. Сейпом в 1995 году.

2. Опубликованные работы и принятые к печати работы:

[1] E. Abakumov, A. Baranov, Y. Belov, *Localization of zeros for Cauchy transforms*, to appear in International Math Research Notes, http://arxiv.org/abs/1312.6706

[2] Y. Belov, V. Havin, *The Beurling–Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces*, to appear in volume Operator Theory (Springer), http://arxiv.org/abs/1309.7130

3. Препринты:

[3] Y. Belov, *Uniqueness of Gabor series*, http://arxiv.org/abs/1409.5231

[4] Y. Belov, *Complementability of exponential systems*, http://arxiv.org/abs/1409.3968

4. Доклады

1. 'Mixed completeness problems and spectral synthesis for exponential systems', Tel Aviv University, School of Mathematical Sciences, Тель-Авив, Израиль, 14 января
2. 'Локализация нулей у преобразования Коши дискретной меры' Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 24 февраля, С.-Петербург
3. 'Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation', Institut de mathématiques de Jussieu, Le Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Париж, Франция, 13 марта
4. 'Localization of zeros for de Branges spaces and applications to canonical systems', конференция Komplexe Analysis undet Theorie Spectrale, Линц, Австрия, 12 мая
5. 'Localization of zeros for de Branges spaces and applications to canonical systems', XXIII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 26 июня, С.-Петербург
6. 'Локализация нулей преобразования Коши', Семинар по комплексному анализу 13 октября г. Москва, МИАН
7. 'Теорема Юнга для систем Габора', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 20 октября, С.-Петербург

октября, Марсель Франция
9. 'Localization of zeros for the Cauchy transforms', Norwegian University of Science and Technology, 17 ноября Трондхейм Норвегия

5. Участие в конференциях

1. Komplexe Analysis undet Theorie Spectrale, Линц, Австрия, 12 -13 мая, http://www.dynamics-approx.jku.at/kats2014/
2. XXIII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 25-30 июня, С.-Петербург, http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma23/
3. Function spaces and Harmonic analysis, 27-31 октября, Марсель Франция http://feichtingertorresani.weebly.com/information.html

6. Организация конференций

1. 'Complex analysis and related topics', 14-18 апреля, С.-Петербург, http://chebyshev.spb.ru/analysis_conference

2. Workshop and Winter School 'Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals (SAFSI2014)', 1-5 декабря С.- Петербург, http://chebyshev.spb.ru/analysis_conference_2

7. Работа в научных центрах и международных группах

1. Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция
2. Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Трондхейм, Норвегия