Отчет по гранту фонда "Династия" за 2013-2015 годы

Ю. Белов

За 3 года удалось получить результаты по следующим направлениям.

0.1. **Наследственная полнота и задачи спектрального синтеза.** Напомним, что точная (полная и минимальная) система векторов $\{x_n\}_{n\in N}$ в Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется наследственно полной, если

$$x \in \overline{\mathrm{Span}}\{(x, y_n)x_n\}_{n\in N}, \quad x \in \mathcal{H},$$

или выполнено эквивалентное свойство

$$\overline{\mathrm{Span}}\{\{x_n\}_{n\in N_1} \cup \{y_n\}_{n\in N_2}\} = \mathcal{H}, \quad N = N_1 \cup N_2.$$

($\{y_n\}$ - биортогональная система.) Одной из целей проекта было изучение этого свойства для систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа.

Важный частный случай - системы из экспонент $\{e^{i\lambda t}\}$ в пространстве $L^2(a, b)$ - был изучен в работе [1]. Оказалось, что, вообше говоря, точная система из экспонент не обязательно наследственно полна. Тем не менее, оказалось, что точные системы из экспонент всегда близки к наследственной полноте (коразмерность смешанной системы не превосходит 1).

В работе [2] был построен первый пример бесконечномерного пространства де Бранжа, в котором любая точная система из воспроизводящих ядер наследственно полна. В работе [6] удалось полностью описать класс таких пространств в терминах меры Кларка пространства. Более того, удалось построить примеры пространств и систем таких, что коразмерность смешанной системы бесконечна. Этот факт имеет важное приложение в теории операторов. А именно, из него следует, что у любого компактного оператора с точечным спектром есть одномерное возмущение, не допускающее спектрального синтеза.

Эти результаты дают исчерпывающие ответы на вопросы Н.К. Никольского, которые мотивировали исследование этих вопросов.

Методы, разработанные для решения задачи о наследственной полноте в пространствах де Бранжа, нашли свое применение в некоторых других задачах теории функций. В частности, при помощи этих методов в работе [5] получен отрицательный ответ на вопрос Б. Коренблюма о подпространствах $C^\infty(a, b)$ инвариантных относительно дифференцирования с дискретным спектром. Более того, удалось получить почти полное описание таких подпространств

Открытые вопросы. Если в пространстве есть ненаследственно полные системы, то хотелось бы уметь их характеризовать в терминах порождающей функции. Даже для экспонент на отрезке этот вопрос разрешен не полностью. Получены необходимые и (отдельно) достаточные условия наследственной полноты конкретной системы. Эти условия пока далеки друг от друга. Также осталось неясным, является ли любая наследственно полная система базисом суммирования.

0.2. **Пространства фоковского типа.** Оказалось, что в пространствах де Бранжа, обладающих свойством наследственной полноты, норма может быть задана как интеграл по всей плоскости с радиально симметричным весом (т.е наше пространство совпадает с весовым пространством Фока как множество с эквивалентностью норм). Удивительно, что верно и обратное: если в пространстве де Бранжа норма может быть задана таким образом, то оно обладает свойством наследственной полноты. Это доказано в работе [6].

В недавнем препринте [13] показано, что почти любое весовое пространство Фока с базисом Рисса из воспроизводящих ядер изморфно некоторому пространству де Бранжа и, следовательно, обладает свойством наследственной полноты.

Изучение наследственной полноты в пространстве Фока наталкивается на многочисленные технические трудности. Мною был получен первый результат в этом направлении - аналог теоремы Юнга о полноте биортогональной системы для классического пространства Фока (см. [9]).

0.3. **Пространства де Бранжа и канонические системы, операторы Шредингера.** Пусть $Y(t,z)$ - (единственное) решение системы

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(t,z)J = zY(t,z)H(t),\ t \in [0,L], \qquad Y(0,z) = Id, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричная (2×2) функция H - Гамильтониан системы ($H \geq 0$, $trH \equiv 1$). Положим $(A_t(z), B_t(z)) := (1,0)Y(t,z)$, $t \in [0,L]$, и $E_t(z) := A_t(z) - iB_t(z)$. Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ соответствует Гамильтониану H. Пожалуй самая важная задача в теории пространств де Бранжа - выявление соответствий между классами Гамильтонианов H и пространств де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. Один из таких фактов - обратная спектральная теорема де Бранжа. В работе [8] получено описание пространств де Бранжа, соответствующих каноническим системам с Гамильтонианом, состоящим из неделимых интервалов, сгущающихся влево. Такие Гамильтонианы *в точности* соответствуют пространствам де Бранжа, в которых есть локализация нулей у функций из пространства. Более того, оказывается, что структура Гамильтониана соответствует структуре аттракторов пространства. В частности, сильная локализация соответствует случаю, когда есть только одна цепочка из неделимых интервалов.

Важный частный случай канонических систем - системы, соответствующие оператору Шредингера на отрезке. В работе [12] получены описания нулей E соответствующей функции класса Эрмита-Билера. В частности, доказано, что существует логарифмическая полоса, свободная от нулей функции E.

0.4. **Другие результаты.** В работе [10] показано, что если порождающая функция G системы экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda} \subset L^2(-\pi,\pi)$ удовлетворяет условию Макенхаупта ($|G(x)|^2 \in (A_2)$) на $\mathbb{R}$, то $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ - базис суммирования в $L^2(-\pi,\pi)$. В частности, такая система всегда наследственно полна.

В работе [4] получен положительный ответ на вопрос о дополняемости системы из экспонент, поставленный А. Накамурой в 2007 году. Для последовательностей Рисса отрицательный ответ был получен К. Сейпом в 1995 году.

В работе [11] получено новое (более простое) доказательство теоремы Полторацкого о лакуне в спектре для разделенных последовательностей.

В работе [7] получено полное описание пространств де Бранжа, в которых любая вещественная бесселева последовательность имеет конечную верхнюю плотность.

Работа [3] носит обзорный характер и посвящена теоремам типа Берлинга-Мальявена.

1. Опубликованные и принятые к печати работы:

[1] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, *Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels*, Adv. Math. **235** (2013), 525–554.

[2] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, D. Yakubovich *Recent developments in spectral synthesis for exponential systems and for non-self-adjoint operators*, Recent Trends in Analysis Proceedings of the conferenece in honor of Nikolai Nikolski, Theta Foundation, Bucharest,(2013), 17–34.

[3] Y. Belov, V. Havin, *The Beurling-Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces*, (2014) Springer series: Operator theory, 1–24.

[4] Y. Belov, *Complementability of exponential systems*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 353 (2015), 215–218.

[5] A.Aleman, A. Baranov, Y. Belov, *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation*, Journal of Functional Analysis 268 (2015), 2421–2439.

[6] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, *Spectral synthesis in de Branges spaces*, Geometric and Functional Analysis, (2015), **25**, 2, 417–452.

[7] Ю. Белов, *Последовательности Бесселя с конечной верхней плотностью в пространствах де Бранжа*, Алгебра и Анализ, (2015), **27**, 4, 15–27.

[8] E. Abakumov, A. Baranov, Y. Belov, *Localization of zeros for Cauchy transforms*, International Mathematics Research Notices, (2015), **2015**, 6699–6733.

[9] Y. Belov, *Uniqueness of Gabor series*, Applied and Computational Harmonic Analysis **39** (2015), 545–551.

[10] Y. Belov, Y. Lyubarskii, *On summation of non-harmonic Fourier series*, to appear in Constructive Approximation,

2. Препринты:

[11] A.Baranov, Y. Belov, A. Ulanovskii , *Gap Theorem for Separated Sequences without Pain*, http://arxiv.org/abs/1509.01030

[12] A.Baranov, Y. Belov, A. Poltoratski , *De Branges functions of Schroedinger equations*, http://arxiv.org/abs/1510.07792

[13] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces and de Branges spaces*, появится в рахиве до конца 2015 года.

3. Доклады

1. 'A restricted shift completeness problem', Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция, 28 января 2013 года
2. 'A restricted shift completeness problem', Institut de mathématiques de Jussieu, Le Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Париж, Франция, 7 февраля 2013 года
3. 'Ограниченность и обратимость дискретного преобразования Гильберта с редкими полюсами', Семинар по комплексному анализу 11 марта 2013 года г. Москва, МИАН
4. 'Отделимость последовательностей Бесселя в пространствах де Бранжа', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 18 марта 2013 года, С.-Петербург
5. 'Approximation of L^2 function on an interval by shifts and exponentials', Hilbert

6. 'Approximation of L^2 function on an interval by shifts and exponentials', 26th Nordic and 1st European-Nordic Congress of Mathematicians, 10 июня 2013 года г. Лунд Швеция
7. 'How to sum Fourier series?', XXII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 25 июня 2013 года, С.-Петербург
8. 'Спектральный синтез для систем воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 30 сентября 2013 года , С.-Петербург
10. 'Mixed completeness problems in the spaces of entire functions', Norwegian University of Science and Technology, 28 октября 2013 года Трондхейм Норвегия
11. 'D-invariant subspaces of C^∞', Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция, 25 ноября 2013 года
12. 'D-invariant subspaces of C^∞', Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies Lille 1, Лилль 29 ноября 2013 года Франция 13. 'Mixed completeness problems and spectral synthesis for exponential systems', Tel Aviv University, School of Mathematical Sciences, Тель-Авив, Израиль, 14 января 2014 года
14. 'Локализация нулей у преобразования Коши дискретной меры' Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 24 февраля 2014 года, С.-Петербург
15. 'Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation', Institut de mathématiques de Jussieu, Le Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Париж, Франция, 13 марта 2014 года
16. 'Localization of zeros for de Branges spaces and applications to canonical systems', конференция Komplexe Analysis undet Theorie Spectrale, Линц, Австрия, 12 мая 2014 года
17. 'Localization of zeros for de Branges spaces and applications to canonical systems', XXIII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 26 июня 2014 года, С.-Петербург
18. 'Локализация нулей преобразования Коши', Семинар по комплексному анализу 13 октября 2014 года г. Москва, МИАН
19. 'Теорема Юнга для систем Габора', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 20 октября 2014 года, С.-Петербург
20. 'How to sum Fourier series?', конференция Function spaces and Harmonic analysis, 28 октября 2014 года, Марсель Франция
21. 'Localization of zeros for the Cauchy transforms', Norwegian University of Science and Technology, 17 ноября 2014 года Трондхейм Норвегия
22. 'Регулярность роста экспоненциального типа в канонической системе', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 6 апреля 2015 года, С.-Петербург
23. 'Uniqueness of Gabor series', Conference on Harmonic Analysis, Function Theory, Operator Theory and Applications in honor of Jean Esterle, 1 июня 2015 года, Бордо Франция
24. 'Regularity of canonical systems', 24th St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis and Summer School for Young Scientists, 25 июня 2015 г. , С.-Петербург
25. 'Новое доказательство теоремы Полторацкого о лакуне в спектре', Семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, 5 октября 2015 года, С.-Петербург
26. 'Новое доказательство теоремы Полторацкого о лакуне в спектре', Семинар по комплексному анализу 19 октября 2015 года г. Москва, МИАН
27. 'Регулярность роста экспоненциального типа в канонической системе', Традиционная зимняя сессия МИАН–ПОМИ, посвященная теме «Комплексный анализ» 21 декабря 2015 года г. Москва, МИАН

4. Участие в конференциях

1. Hilbert function spaces, 20-24 мая 2013 г. Гарньяно Италия, http://hfs2013.dm.unibo.it
2. 26th Nordic and 1st European-Nordic Congress of Mathematicians, 10-13 июня 2013 г. Лунд Швеция, http://www.maths.lth.se/nordic26/
3. XXII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 25-30 июня 2013 г., С.-Петербург, http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma22/
4. Komplexe Analysis undet Theorie Spectrale, Линц, Австрия, 12 -13 мая 2014 г., http://www.dynamics-approx.jku.at/kats2014/
5. XXIII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, 25-30 июня 2014 г. , С.-Петербург, http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma23/
6. Function spaces and Harmonic analysis, 27-31 октября 2014 г., Марсель Франция http://feichtingertorresani.weebly.com/information.html
7. Conference on Harmonic Analysis, Function Theory, Operator Theory and Applications in honor of Jean Esterle, 1-4 июня 2015 года, Бордо Франция, http://esterle.sciencesconf.org
8. Recent trends in Operator Theory and Function Theory, 8-12 июня 2015 года, Лилль, Франция, http://www.mathconf.org/otfalille2015
9. 24th St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis and Summer School for Young Scientists, 25-30 июня 2015 г. , С.-Петербург, http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma24/

5. Организация конференций

1. 'Complex analysis and related topics', 14-18 апреля 2014 г., С.-Петербург, http://chebyshev.spb.ru/analysis__conference

2. Workshop and Winter School 'Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals (SAFSI2014)', 1-5 декабря 2014 г. С.- Петербург, http://chebyshev.spb.ru/analysis__conference__2

6. Работа в научных центрах и международных группах

1. Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, Aix–Marseille Université, Марсель, Франция
2. Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Marne-la-Vallée Université Paris-Est, Париж, Франция
3. Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Трондхейм, Норвегия