

Отчет по гранту фонда “Династия” за 2013 год Алексей Буфетов

1 Результаты, полученные в этом году

В этом году мои основные результаты были получены в асимптотической теории представлений. Я сформулирую один из полученных результатов, после чего кратко опишу остальные.

Пусть даны два неприводимых представления группы $U(N)$. Рассмотрим разложение (кронекевского) тензорного произведения этих представлений на неприводимые. Оказывается, что при N стремящемся к бесконечности для этого разложения выполнен закон больших чисел — большинство получающихся представлений близки к некоторому детерминированному.

Более подробно, хорошо известно, что неприводимые представления унитарной группы $U(N)$ параметризуются набором целых чисел — *сигнатурой* — $\lambda := \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. Пусть T^λ и T^μ — два неприводимых представления $U(N)$. Рассмотрим разложение

$$T^\lambda \otimes T^\mu := \sum_{\nu} c_{\nu}^{\lambda\mu} T^{\nu},$$

и определим вероятностную меру на сигнатурах из N чисел по формуле

$$Prob(\nu) = \frac{c_{\nu}^{\lambda\mu} \text{Dim}(T^{\nu})}{\text{Dim}(T^{\lambda}) \text{Dim}(T^{\mu})}.$$

Предположим, что два таких набора, λ и μ , зависят от N таким образом, что $\frac{1}{N} \sum_i \delta(\lambda_i/N) \rightarrow \eta_1$ и $\frac{1}{N} \sum_i \delta(\mu_i/N) \rightarrow \eta_2$, где имеется в виду сходимость в слабом смысле к некоторым вероятностным мерам η_1 и η_2 , имеющим компактный носитель. Тогда выполнена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть ν — случайная сигнатура, распределенная по мере $Prob$. Рассмотрим случайную меру $\frac{1}{N} \sum_i \delta(\nu_i/N)$. Выполнено

$$\frac{1}{N} \sum_i \delta\left(\frac{\nu_i}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \eta_1 \boxtimes \eta_2, \quad \text{в слабом смысле; по вероятности,}$$

где $\eta_1 \boxtimes \eta_2$ — вероятностная мера, однозначно определяемая по η_1 и η_2 .

Эта теорема, наряду с описанием операции \boxtimes , аналогичными теоремами для других классических групп Ли, а также некоторыми другими близкими результатами, была получена в [4].

В работе [3] исследовалась предельная форма для случайных сигнатур, возникающих из экстремальных характеров бесконечномерной унитарной группы. Особенностью данной работы является весьма широкий класс рассмотренных экстремальных характеров и возникших предельных форм.

В работе [2] также рассматривалась задача из асимптотической теории представлений. В этой работе была получена центральная предельная теорема нового типа — о сходимости некоммутативных “вероятностных” величин к набору гауссовских свободных полей.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

[1] A. Bufetov, *Kerov's interlacing sequences and random matrices*, Journal of Mathematical Physics, 54 113302 (2013) ; <http://dx.doi.org/10.1063/1.4830024>. arXiv:1211.1507

[2] A. Borodin, A. Bufetov, *Plancherel representations of $U(\infty)$ and correlated Gaussian Free Fields*, arXiv:1301.0511

[3] A. Borodin, A. Bufetov, G.Olshanski, *Limit shapes for growing extreme characters of $U(\infty)$* , arXiv:1311.5697

[4] A. Bufetov, V. Gorin, *Representations of classical Lie groups and quantized free convolution*, arXiv:1311.5780

3 Участие в конференциях и школах

1) Участие в Cornell Summer Probability School, июль 2013, Cornell University.

2) Участие в ICTP Advanced Workshop and Conference “Random matrices and growth models”, сентябрь 2013, Trieste.

4 Работа в научных центрах и международных группах

Научный визит в MIT, март 2013.

5 Педагогическая деятельность

Учебный ассистент по курсу “Эргодическая теория и динамические системы”, ВШЭ-НМУ, весна и осень 2013.