Отчет за 2013 год
Екатерины Владимировны Булинской

1. Результаты, полученные в 2013 году

Научную работу Е.Вл.Булинская в 2013 году вела в следующих трех взаимосвязанных направлениях:

а) доказательство предельных теорем в модели каталитического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления;

б) анализ времен достижения с запретом для марковских цепей с непрерывным временем и конечным или счетным пространством состояний;

в) введение эффективной классификации ветвящихся процессов с произвольным конечным числом центров катализа.

Обсудим детально каждое из этих направлений, а также основные результаты, установленные автором отчета.

а) Начиная с 90-х годов прошлого века внимание специалистов в области теории случайных процессов привлекли модели эволюции популяций, в которых частицы могут перемещаться в пространстве, а размножаться или гибнуть только в "центрах катализа". Такого рода ветвящиеся случайные блуждания тесно связаны с моделью Андерсена, широко известной в физике. Благодаря работам С. Альбеверио, Л.В. Богачева, В.А. Ватутина, Ф. Кармоны, С.А. Молчанова, В.А. Топчия, Е. Ху, Е.Б. Яровой и Е.Вл.Булинской удалось построить завершенную картину исследований, относящихся к анализу каталитических ветвящихся случайных блужданий (КВСБ) по целочисленным решеткам $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с одним источником ветвления при критическом и надкритическом режимах. При этом были обнаружены неожиданные эффекты размерности решетки, влияющей на асимптотические (когда время t стремится к бесконечности) свойства общих и локальных численностей частиц в КВСБ. Не поддавался изучению лишь случай локальных численностей в докритическом КВСБ. Именно такой случай исследован Е.Вл.Булинской в ее новой статье 2013 года. Для этого она предложила оригинальный подход, использующий связь между дробными производными производящей функции и дробными моментами числа частиц. В итоге Е.Вл.Булинской впервые были найдены условные предельные распределения локальных численностей частиц в докритическом КВСБ по целочисленной решетке произвольной размерности. Стоит также отметить, что в процессе установления этих результатов было выявлено асимптотическое поведение вероятности наличия частиц в фиксированном узле решетки, порядок убывания которой есть $t^{-3/2}$, $(t\ln^2 t)^{-1}$ и $t^{-d/2}$ соответственно при $d = 1$, $d = 2$ и $d \geq 3$. Таким образом, оказалось, что с точностью до мультипликативного множителя асимптотическое поведение упомянутой вероятности наличия частиц в фиксированном узле и средних локальных численностей частиц одно и то же. В свою очередь, порядок убывания средних локальных численностей частиц совпадает с порядком убывания переходной вероятности случайного блуждания при $d \geq 3$, а при $d = 1$ и $d = 2$ отличается от него. Эти удивительные совпадения можно объяснить лишь аналитически, если внимательно прочитать три доказанных

Е.Вл.Булинской теоремы. Итак, зависимость от узла, например $y \in \mathbb{Z}^d$, асимптотического поведения как вероятности наличия частиц в y, так и среднего числа частиц в y, проявляется только в мультипликативном множителе, но не в порядке убывания.

б) Введение и использование понятия времени достижения с запретом для марковских цепей имеет длинную историю, и первое подробное изложение предмета было дано в классической монографии К.Л.Чжуна (“Однородные марковские цепи”, 1964, М.: Мир). Применение вероятностей с запрещениями и времен достижения с запретами служит мощным методом для изучения функционалов от марковских цепей, теории потенциала для марковских цепей, свойств траекторий и т.п. Однако ранее формула для вероятности конечности времени достижения была получена только для случая пустого множества запретов. Е.Вл.Булинской удалось завершить исследование конечности времен достижения с запретом для произвольного множества запретов и для любой марковской цепи с непрерывным временем. Эти результаты сформулированы в виде трех теорем. Первая теорема дает представление для вероятности конечности времен достижения с запретом через вероятности с запрещениями. Вторая теорема содержит соотношения между исследуемыми вероятностями с различными начальным и конечным состояниями, когда множества запретов отличаются одним элементом. Последний результат дает возможность построить конечную рекуррентную схему для вычисления рассматриваемой вероятности, если либо множество запретов, либо его дополнение конечны. Третья теорема охватывает важный частный случай множества запретов, состоящего из одного элемента. Доказательства используют преобразования Лапласа-Стилтьеса для функций, возникающих в системе К.Л.Чжуна интегральных уравнений типа свертки. Исследование конечности времен достижения с запретом вызвано их применением к получению эффективной классификации каталитических ветвящихся процессов.

в) Каталитический ветвящийся процесс (КВП) с произвольным конечным числом центров катализа описывает систему частиц, в которой перемещение частиц задается марковской цепью с конечным или счетным пространством состояний, а размножение и гибель может происходить только в “центрах катализа”. КВП является более общей моделью, чем КВСБ, рассмотренное в пункте а), в силу как большего выбора генераторов движения частиц, так и наличия нескольких центров катализа (“катализаторов”) вместо одного. В 2013 году Е.Вл.Булинской предложено классифицировать КВП с N катализаторами как надкритический, критический или докритический в зависимости от значения перронова корня определенной матрицы размера $N \times N$. Эффективность данной классификации подтверждается проведенным Е.Вл.Булинской анализом асимптотического (когда время стремится к бесконечности) поведения моментов общих и локальных численностей частиц в КВП. Оказалось, что рост моментов является экспоненциальным и не более чем полиномиальным соответственно при надкритическом и критическом режимах, а при докритическом режиме моменты стремятся к неотрицательным постоянным. С помощью введения множества критичности автором отчета также рассмотрены эффекты взаимного влияния параметров катализаторов на асимптотическое поведение процесса. Ею было обнаружено, что даже при тотальной гибели частиц во всех центрах катализа, кроме одного, можно так выбрать “интенсивность” размножения в этом последнем центре, что будет достигаться любой из режимов: надкритический, критический или докритический. При этом явно приведены формулы для упомянутой “интенсивности”. Доказательства установленных результатов основаны на новом варианте построения (с помощью времен достижения с запретом) вспомогательного многотипного ветвящегося процесса Беллмана-Харриса, а также на применении многомерных теорем восстановления. Доказательство основной теоремы состоит из девяти этапов и занимает 13 страниц. Полученные Е.Вл.Булинской результаты для КВП обобщают и усиливают известные ранее теоремы С. Альбеверио, Л.В. Богачева, Л. Деринга, М. Робертса и Е.Б. Яровой, относящиеся к КВП с одним центром катализа и к КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с конечным числом источников ветвления.

Результаты проведенного исследования опубликованы в двух статьях автора и анонсированы в тезисах докладов. Они докладывались на 4-х международных конференциях как в нашей стране, так и за рубежом.

2. Опубликованные работы

1. Булинская Е.Вл., “Докритическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с конечной или бесконечной дисперсией числа потомков”. Труды МИАН, 282(1), 2013, 69-79.

2. Bulinskaya E.Vl., “Finiteness of hitting times under taboo”. Statistics and Probability Letters, 85(1), 2014, 15-19.

3. Bulinskaya E.Vl., “Effective classification of branching processes with several points of catalysis”. Abstracts of Communications of the Seventh International Workshop on Simulation, Rimini, May 21-25, 2013, 90-91.

4. Bulinskaya E.Vl., “Hitting times under taboo for Markov chains”. Abstracts of Communications of Russian-Chinese Seminar on Asymptotic Methods in Probability Theory and Mathematical Statistics, St. Petersburg, June 10-14, 2013, 19-20.

5. Bulinskaya E.Vl., “Catalytic branching processes via hitting times with taboo and Bellman-Harris processes”. Abstracts of Communications of 29-th European Meeting of Statisticians, Budapest, July 20-25, 2013, 62-62.

3. Участие в конференциях и школах

1. “Рождественские математические встречи” победителей конкурса молодых математиков фонда “Династия”, Москва, НМУ, 8-11 января 2013.

2. The Seventh International Workshop on Simulation, Rimini (Italy), May 21-25, 2013.

3. Russian-Chinese Seminar on Asymptotic Methods in Probability Theory and Mathematical Statistics, St. Petersburg, June 10-14, 2013.

4. European Meeting of Statisticians, Budapest (Hungary), July 20-25, 2013.

5. Workshop “Probability, Analysis and Geometry”, Ulm (Germany), September 2-6, 2013.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Е.Вл.Булинская работает ассистентом кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова. В 2013 году получила диплом кандидата физико-математических наук. Она поддерживает научные контакты со специалистами в области ветвящихся процессов из разных стран, когда участвует в международных конференциях. Имеет единственное место работы в Москве.

5. Педагогическая деятельность

В 2013 году Е.Вл.Булинская вела на мехмате МГУ семинары по обязательным курсам “Математическая статистика” и “Теория случайных процессов”, а также принимала экзамены и зачеты по этим предметам. Ею был прочитан новый годовой специальный курс “Введение в теорию ветвящихся процессов”, рассчитанный на студентов 2-го курса. В настоящее время Е.Вл.Булинская является научным руководителем восьми студентов. Она также организовала и является руководителем нового научно-исследовательского семинара “Приложения теории ветвящихся процессов”.