Геометрия специальных римановых многообразий

Д. В. Егоров

Отчет 2015 года

В этом году я оставил исследования специальных римановых многообразий и решил заняться изучением дискретной дифференциальной геометрии. Если точнее, то меня заинтересовал цикл работ С.П. Новикова и И.А. Дынникова по дискретизации комплексного анализа. Дискретизацией объектов на комплексной плоскости до этого занималось большое количество математиков. Новаторский подход вышеупомянутых авторов упрощая можно описать следующим образом. Центральной идеей яляется отказ от прямоугольных сеток и переход к раскрашенным треугольным. Соответственно дискретизация уравнения Коши–Римана производится не очевидным "квадратным"способом с использованием комплексных весов, а чисто вещественным "треугольным— для каждого треугольника оператор К.–Р. суммирует значения сеточной функции в его узлах. Получаемая дискретизация с одной стороны связывает обе размерности, а с другой является уравнением первого порядка, в отличие от классической, которая (вместе со своими уравнениями совместности) приводит ко второму порядку. В цикле работ Новиков и др. построили элементарные функции: полиномы и экспоненту, доказали принцип максимума, теорему Лиувилля, формулу Коши–Грина.

Меня заинтересовало, насколько далеко в рамках этого подхода может быть развита аналогия с непрерывной математикой. Мне показалось интересным исследовать связь дискретного комплексного анализа с топологией симплициального комплекса, хотя по большому счету мы и имеем всего один инвариант, характеристику Эйлера. Для этого я дополнил определение дискретного оператора К.–Р. с тем, чтобы получить оператор Дольбо и оператор внешнего дифференцирования. Соответственно для этого пришлось ввести определения "дифференциальных"форм. Переходя к компактным 2-многообразиям, рассмотрим аналитический индекс введенного оператора внешнего дифференцирования на комплексе форм и получаем, что он равен характеристике Эйлера симплициального комплекса. Интереснее рассмотреть аналитический индекс оператора Дольбо на комплексе из форм с "простыми полюсами". Мы считаем, что дискретная функция (форма) имеет простой полюс, если при действии оператора К.–Р. на нее получается символ Кронекера (дискретная дельта функция), умноженный на некоторую константу.

Для дискретных торов, т.е. в случае тривиального касательного расслоения, мы получаем, что индекс данного комплекса равен характеристике Эйлера плюс количество полюсов, т.е. дискретный аналог формулы Римана–Роха. На данный момент непонятно имеет ли данная формула за собой какую-либо содержательную теорию. Например можно ли определить топологический индекс со всеми сопутствующими структурами. Также непонятен вопрос с "эллиптичностью"и символом дискретного оператора. Я планирую доказать дискретную формулу Р.–Р. для произвольных симплициальных комплексов с комплексной структурой.

Из достижений за прошедшие три года могу отметить определение нового класса уравнений Монжа–Ампера на римановых многообразиях со специальными группами голономий. В случае $SU(3)$ новое уравнение получается в некотором роде зеркальным к классическому комплексному уравнению Монжа–Ампера.

К сожалению в этом году мне не удалось никуда съездить.

Я преподаю в Северо-Восточном федеральном университете следующие курсы: вариационное исчисление и математическое моделирование.

Напоследок я бы хотел выразить свою глубокую благодарность фонду «Династия» и лично Дмитрию Зимину за бескорыстную поддержку.