Геометрия специальных римановых многообразий

Отчет 2014 года

Д.В. Егоров

Классическое уравнение типа Монжа–Ампера, нелинейный оператор которого имеет вид определителя матрицы Гессе, т.е. матрицы вторых производной функции многих переменных, может рассматриваться над различными алгебрами с делением (т.е. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$) при выборе соответствующего гессиана. Наиболее известны вещественное и комплексное уравнения Монжа–Ампера:

$$\det \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x_i \partial x_j} = F'; \qquad \det \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = F'';$$

где $\varphi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi'' : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ вещественные скалярные функции.

Недавно Алескером были также определены и исследованы кватернионное и октонионное (только для размерности 2 из-за неассоциативности октонионов) уравнения М.-А. путем соответствующего обобщения определения комплексного оператора Дольбо $\partial/\partial z = \partial/\partial x - i\partial/\partial y$.

Одним из наиболее известных применений комплексного уравнения Монжа–Ампера является доказательство Яу гипотезы Калаби о том, что односвязные компактные кэлеровы многообразия, первый класс Чжэня которых равен нулю, допускают метрику с нулевой кривизной Риччи. Доказательство данной гипотезы сводится к теореме существования и единственности решения комплексного уравнения Монжа–Ампера.

Замысел моей работы состоял в обобщении уравнений Монжа–Ампера на различные классы римановых пространств со специальными дифференциальными формами, т.е. тензорными полями с большим количеством симметрий. Условие специальности означает, что форма инвариантна относительно некоторой группы преобразований, а также может быть приведена к определенному виду при действии другой группы преобразований.

Так например, эрмитово пространство, мнимая часть эрмитовой метрики которого является замкнутой 2-формой называется кэлеровым пространством. Данная (тоже кэлерова) 2-форма инвариантна относительно $Sp(2n, \mathbb{R})$ и может быть приведена к диагональному виду действием группы $GL(n, \mathbb{C})$. Из свойств кэлеровой формы следует, что ее деформация в когомологическом классе описывается формами с коэффициентами вида $\partial^2\varphi/\partial z_i\partial\bar{z}_j$. Кэлерова форма в n-й внешней степени (здесь возникает определитель), где n комплексная размерность пространства, пропорциональна форме объема метрики, т.е. скалярному полю, интеграл по многообразию от которого выражает объем многообразия. Таким образом, деформация кэлеровой метрики с целью получить заданную форму объема, порождает комплексное уравнение Монжа–Ампера.

Одним из известных примеров римановых пространств со специальными формами является Spin(7)-пространство. Данные пространства имеют вещественную размерность 8 исключительно и обладают некоторыми специальными симметриями, которые привлекают к ним внимание и нематематиков. Я определяю новое уравнение типа Монжа–Ампера для римановых пространств со Spin(7)-структурой, т.е. например $\mathbb{O}$, используя дифференциальный оператор Вербицкого, обобщающий оператор Дольбо. Оказывается, что полученное уравнение наиболее естественно записывается в октонионных координатах. Я установил условия эллиптичности нелинейного уравнения, т. е. определил подкласс субгармонических функций при ограничении решений на который уравнение становится эллиптическим. К сожалению, доказательство существования решения нового уравнения по аналогии с доказательством Яу оказывается достаточно сложным. Статья сдана в журнал в ноябре 2014 г.

В прошедшем году я имел удовольствие работать в НИУ ВШЭ г. Москва с М. Вербицким (февраль) и в Университете Марселя с А. Буфетовым (апрель–июль), которым, а также фонду «Династия», хотел бы выразить свою искреннюю благодарность.