Отчет по гранту фонда «Династия» за 2015 г.

А. В. Фонарёв

Производные категории когерентных пучков являются важнейшими инвариантами алгебраических многообразий. Более того, один из современных подходов к некоммутативной геометрии состоит в том, чтобы в качестве некоммутативного многообразия рассматривать "достаточно хорошую" категорию. Примерами некоммутативных многообразий при таком определении являются полуортогональные компоненты производных категорий гладких проективных многообразий.

Давно известно, что не всякая производная категория гладкого алгебраического многообразия допускает полуортогональные разложения. Простешим примером являются гладкие проективные кривые. С одной стороны, производная категория $\mathbb{P}^1$ допускает разложения, порожадемые исключительными наборами Бейлинсона из двух линейных расслоений. Все они могу быть легко описаны: $D^b(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}(t), \mathcal{O}(t+1) \rangle$ для любого целого t. С другой стороны, не очень сложно проверить, что производные категории кривых положительного рода являются неразложимыми.

Наиболее приятно себя ведут прозводные категории многообразий Фано. Например, любое линейное расслоение на многообразии Фано является исключительным, а всякий исключительный объект в производной категории дает нетривиальное полуортогональное разложение. Гипотеза А. Бондала гласит, что производная категория любого гладкого проективного многообразия может быть вложена в производную категорию некоторого гладкого многообразия Фано. Таким образом, если гипотеза верна, достаточно ограничиться изучением производных категорий многообразий Фано и их полуортогональных компонент.

Мотивированный гипотезой Бондала и вычислениями на уровне мотивов, С. Галкин предсказал, что производная категория алгебраической кривой C рода больше единицы вкладывается в производную категорию многообразия модулей M стабильных расслоений ранга 2 на C с фиксированными нечетным детерминантом. Хорошо известно, что M является гладким многообразием Фано, поэтому из гипотезы Галкина следует положительный ответ на гипотезу Бондала.

Совместно с А. Кузнецовым нам удалось доказать гипотезу Галкина для общей кривой. Далее я кратко опишу наш подход. Во-первых, согласно замечательной теореме Д. Орлова, любое вложение производных категорий алгебраических многообразий задается некоторым функтором Фурье–Мукаи. Наиболее естественный функтор в нашем случае задается универсальным расслоением на $C \times M$, которое также классически называют расслоением Пуанкаре. Следующий шаг — свести задачу для общей кривой к гиперэллиптическому случаю. Так как расслоение Пуанкаре можно определить в достаточно большой общности (условно говоря, все можно рассматривать над пространством модулей кривых), а условие функтора быть вложением открыто (что мы доказываем), гиперэллиптического случая достаточно.

Наконец, мы исследуем случай гиперэллиптической кривой. Классическая конструкция связывает пересечение двух квадрик $X = Q_0 \cap Q_1 \subset \mathbb{P}^{2g+1}$ с гиперэллиптической кривой рода $g > 1$. Классический результат Бондала и Орлова гласит, что $D^b(C)$ вкладывается в производную категорию $D^b(X)$. Определим X_k как многообразие проективных плоскостей размерности k, лежащих на X (иначе говоря, лежащих на обеих квадриках), в частности, $X_0 = X$. Для всякого $k = 0, \ldots, g-2$ мы строим некоторое расслоение на $C \times X_k$ и показываем, что соответствующий функтор Фурье–Мукаи задает вложение. С другой стороны, классический результат Дезаля и Раманана отождествляет M и X_{g-1}, причем при таком отождествлении наше семейство расслоений соответствует универсальному расслоению Пуанкаре. Таким образом, мы одновременно обобщаем результат Бондала и Орлова и доказываем гипотезу Галкина для гиперэллиптических кривых. Наконец, вышеописанный аргумент доказывает гипотезу Галкина для общей гладкой проективной кривой.

Papers

[1] *Derived categories of curves as components of Fano manifolds*, joint with A. Kuznetsov, in preparation.

Scientific conferences and seminar talks

[1] *Derived categories of curves as components of Fano varieties*, MPIM, Bonn, Germany, May 26.

[2] *Derived categories of curves as components of Fano varieties*, "GEOQUANT 2015", Madrid, Spain, September 18.

[3] *Derived categories of curves as components of Fano varieties*, "Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry II", IPMU, Japan, November 17.