Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2014 год

Алексей Гарбер

14 декабря 2014 г.

1 Научные результаты

1.1 Классификация пятимерных параллелоэдров Вороного

Совместно с Ахиллом Шурманном (Achill Schürmann) и Матьё Дютуром (Mathieu Dutour-Sikirić) получена полная классификация пятимерных параллелоэдров Вороного.

Выпуклый многогранник P в d-мерном пространстве называется *параллелоэдром*, если $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на попарно непересекающиеся трансляции P. Теория параллелоэдра берет свое начало с работ российского кристаллографа Е.С.Фёдорова и основоположника геометрии чисел, немецкого математика Г.Минковского.

Одной из наиболее инетересных гипотез в теории параллелоэдров является гипотеза Вороного, данная гипотеза, сформулированная в 1908 году, утверждает, что любой d-мерный параллелоэдр может быть получен аффинным преобразованием из многогранника Вороного некоторой d-мерной решетки. Обратное утверждение очевидно. Гипотеза Вороного доказана в некоторых частных случаях в работах самого Г.Ф.Вороного, Б.Н.Делоне, О.К.Житомирского, Р.Эрдала и А.Ордина. Однако в общем случае она остается открытой.

В малых размерностях все параллелоэдры классифицированы (с точностью до комбинаторное эквивалентности) и для них проверена гипотеза Вороного. Достаточно очевидно, что двумерными параллелоэдрами являются все параллелограмы и центральносимметричные шестиугольники. Все пять трехмерных параллелоэдров были найдены Фёдоровым в 1885 году. В 1929 году Делоне доказал гипотезу Вороного для четырехмерных параллелоэдров и нашел 51 четырехмерный параллелоэдр; последний параллелоэдр, пропущенный Делоне, был найден М.И.Штогриным в 1974 году.

В нашей работе, мы приводим три независимых реализации алгоритма для классификации всех пятимерных параллелоэдров Вороного, то есть тех параллелоэдров, которые удовлетворяют гипотезе Вороного. Для классификации мы используем разбиение конуса положительных квадратичных форм (расположенного в пространстве размерности $d(d+1)/2$) на области приведения, то есть на области, которые соответствуют различным разбиениям Делоне решетки $\mathbb{Z}^d$ для различных квадратичных форм, задающих метрику. Разбиения Делоне двойственны разбиениям Вороного, тем самым делается первый шаг к полной классификации. Затем полученные области проверяются на эквиалентность относительно действия группы $SL_d(\mathbb{Z})$ на конус. В результате было найдено 110244 различных областей приведения и было проверено, что они задают комбинаторно различные параллелоэдры. Статья с указанными выше результатами готовится к публикации.

1.2 Монокорональные разбиения

Совместно с Дирком Фреттлё (Dirk Frettlöh) мы исследовали монокорональные разбиения в евклидовых и гиперболических пространствах. Разбиение пространства на выпуклые многогранники называется *монокорональным*, если для любой пары вершин их короны (то есть наборы многогранников их содержащие вместе с правилами склейки) конгруэнтны. Тем самым, в данных разбиениях "окрестности" любой пары вершин устроены одинаков. Нас интересовал вопрос "Какой может быть группа трансляций у такого разбиения, например, может ли группа симметрий такой разбиения быть некристаллографической?". Похожие вопросы для других классов разбиений и точесных множеств исследовалисяь в работах Р.В.Галиулина, Б.Н.Делоне, Н.П.Долбилина, М.И.Штогрина и других.

В нашем препринте (см. ниже) исследованы все возможные монокорональные разбиения евклидовой плоскости и получены все возможные группы симметрий, которые могут быть у таких разбиений. Доказано, что группой симметрий могут быть 16 из 17 кристаллографических групп и 4 из 7 frieze groups (частный случай групп, которые содержат одномерную группу трансляций).

Кроме того мы построили монокорональные разбиения d-мерного пространства для любого d, группа симметрий которого содержит лишь $\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor$-мерную группу трансляциё, или вообще являются апериодическими (с пустой группой трансляций) при $d \geq 3$, правда в последнем случае разбиение не является разбиением грань-в-грань.

Также для гиперболического пространства $\mathbb{H}^d$ при $d \geq 2$ были построены примеры нормальных монокорональных разбиений, группы симметрий которых не являются кристаллографическими. Данные разбиения получаются взятием двойственных разбиений к разбиениям Бёрёцки.

2 Публикации и препринты

- D. Frettlöh, A. Garber, Symmetries of Monocoronal Tilings, http://arxiv.org/abs/1402.4658, preprint 2014.

3 Доклады на конференциях и семинарах

- Доклад "Another ham sandwich in the plane" на конференции "Sixth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference", Университет Техаса в г. Браунсвилле, 9–12 апреля 2014г.

- Доклад "Parallelohedra and the Voronoi Conjecture" на конференции "Геометрия и Топология", посвященной 60-летию О.Р. Мусина, ИППИ РАН, 10–11 февраля 2014г.

- Доклад "On triangular paperfoldings" на семинаре исследовательской группы "Combinatorial and topological structure of aperiodic tilings" в университете г. Билефельда, 17 января 2014г.

- Доклад "О симметриях монокорональных разбиений" на семинаре "Дискретная геометрия и геометрия чисел", механико-математический факультет МГУ, 18 марта 2014г.

4 Работа в научных центрах и международных группах

- С 6 января по 1 февраля я работал в группе Михаэля Бааке, в университете Билефельда, над различными вопросами в теории апериодических разбиений.

- С 5 по 14 мая я работал с Ахиллом Шурманном и Матьё Дютуром в университете Ростока над различными вопросами теории параллелоэдров и решеточных триангуляций.

5 Педагогическая деятельность

В весеннем семестре я вел семинарские занятия по курсу линейной алгебре и геометрии на механико-математическом факультете МГУ. Также я работал в жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике и участвовал в подготовке сборной команды России к участию в Международной математической олимпиаде.