

Отчёт за 2015 год по гранту фонда «Династия»

Герман О. Н.

Полученные в этом году результаты

Как известно, если n — натуральное число, отличное от квадрата, цепная дробь числа \sqrt{n} имеет вид $[a_0; \overline{a_1, \dots, a_{t-1}, a_t}]$, где $a_t = 2a_0$, а последовательность a_1, \dots, a_{t-1} симметрична. То есть период цепной дроби \sqrt{n} является палиндромом в том смысле, что, прочитанный задом наперёд, он также является периодом. Возникает естественный вопрос об обращении этого утверждения, то есть о критерии палиндромичности периода цепной дроби квадратичной иррациональности. Вопрос этот поднимался, к примеру, В. И. Арнольдом, хотя, наверняка возникал и у кого-то из классиков прошлых веков. Но, поскольку у классиков мы ничего на сей счёт не нашли, а существующий критерий Ф. Айкарди является слишком неявным, мы с Ибрагимом Глюстангеловым заинтересовались этим вопросом и получили следующий критерий. Напомним, что в теории цепных дробей числа называются *эквивалентными*, если «хвосты» их цепных дробей совпадают. В частности, для периодических цепных дробей это в точности означает совпадение периодов.

Теорема 1. *Период цепной дроби квадратичной иррациональности α палиндромичен тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из утверждений:*

- а) $\alpha \sim \beta : \beta^2 \in \mathbb{Q}$;
- б) $\alpha \sim \beta : (\beta - 1/2)^2 \in \mathbb{Q}$
- в) $\alpha \sim \beta : \beta^2 + q\beta + 1 = 0, q \in \mathbb{Q}$;
- г) $\alpha \sim \beta : \beta^2 + q\beta - 1 = 0, q \in \mathbb{Q}$.

При этом пункты б) и в) эквивалентны.

В частности, из пунктов а) и б) следует, что любое целое алгебраическое число степени 2 имеет палиндромический период.

Опубликованные и поданные в этом году работы

- [1] О. Н. ГЕРМАН, К. Г. ЕВДОКИМОВ *Усиление теоремы переноса Малера*, Известия РАН, Серия математическая., **79**:1 (2015), 3–16.
- [2] O. N. GERMAN, I. A. TLYUSTANGELOV *On a criterion for a quadratic irrationality's continued fraction to have a palindromic period*, подано в Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory.
- [3] О. Н. ГЕРМАН *Диофантовы экспоненты*, обзор, будет подано в УМН.

Были сделаны доклады на следующих конференциях

- Международная конференция “Toric Topology, Number Theory and Applications” (Хабаровск, сентябрь 2015)
- Международная конференция “Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics” (Санкт-Петербург, сентябрь 2015)
- Международная конференция “Diophantine Approximation and Related Topics” (Aarhus, Дания, июль 2015)
- Международная конференция “29th Journées Arithmétiques” (Debrecen, Венгрия, июль 2015)

- Конференция фонда Династия “Встреча поколений” (Москва, июнь 2015)
- Международная конференция “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения” (Тула, май 2015)
- VIII школа-конференция “Байкальские чтения” (Иркутск, март 2015)

Педагогическая деятельность

- Курс “Теория чисел”, мехмат, 4-й курс, лекции и семинары
- Курс “Элементарная теория чисел”, мехмат, 1-й курс, семинары
- Курс “Алгебра”, СУНЦ МГУ, 10-й класс, лекции и семинары (весенний семестр)
- Заведование кафедрой математики СУНЦ МГУ (весенний семестр)
- Научное руководство четырьмя аспирантами (Константин Евдокимов, Илья Макаров, Михаил Лысов, Андрей Меньщиков) и четырьмя студентами (Ибрагим Тлюстангелов, Вероника Мингалеева, Эльмир Бигушев, Максим Ильметов)

Сравнение заявки с заявленными результатами

За три года удалось получить результаты в трёх направлениях. Первое направление — это усиление теоремы переноса Малера, второе — обобщение параметрической геометрии чисел на многопараметрический случай, третье — исследование симметрий периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей.

Заявленные планы реализовались полностью лишь в направлении усиления теоремы Малера. В заявке ещё шла речь об уточнении ряда теорем переноса — доказательства их аналогов для произвольных функций вместо экспонент. Эту деятельность пришлось отложить, поскольку возникли более интересные идеи в направлении параметрической геометрии чисел, в котором были получены результаты о диофантовых экспонентах решёток. Кроме того, немного неожиданно возникла и третья тема — о симметриях периодов цепных дробей, что также не позволило двигаться строго в заявленном направлении.

В дальнейшем мы планируем продолжить исследования и в этих новых направлениях, и завершить получение заявленных результатов. Кроме того, мы планируем применить наработанную технику к задачам, связанным с гипотезой Вирзинга о приближении вещественных чисел алгебраическими, а также к некоторым открытым проблемам о промежуточных диофантовых экспонентах, восходящих к Шмидту.