Итоговый отчет по гранту фонда «Династия» за 2013–2015 гг.

Д.В. Горбачев
Тульский государственный университет

Мотивация проекта состояла в оценке плотности Δ_n упаковки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ одинаковыми шарами средствами гармонического анализа, а именно при помощи решения экстремальных задач типа Дельсарта. Также изучались приложения применяемой техники решения экстремальных задач в родственных проблемах метрической геометрии, гармоническом анализе и теории приближения функций.

1. Заявленные цели исследования

1. Решение задачи Дельсарта для $\mathbb{R}^n$ при $n = 8, 24$. Как следствие, нахождение плотности упаковки в этих размерностях.
2. Новые оценки плотности упаковки Δ_n для небольших n.
3. Асимптотическая оценка плотности упаковки Δ_n, лучшая оценки Кабатянского–Левенштейна на экспоненциально убывающий по размерности множитель.
4. Построение параметрических семейств взвешенных сферических дизайнов.
5. Доказательство экстремальности некоторых сферических дизайнов.

2. Основные результаты

Поставленные задачи очень сложные и, к сожалению, несмотря на затраченные усилия, пока остаются в большей части нерешенными (задачи 1–3). Из прямых целей удалось получить новые результаты для сферических дизайнов (задачи 4–5). Однако в ходе реализации проекта удалось продвинуться в решении родственных экстремальных задач гармонического анализа, что оказалось важно для приложений.

Приведем главные результаты за период выполнения проекта.

1. Ф. Дельсарт, Дж. Гeталс и Й. Зейдель (1977) доказали, что

$$N(d,s) \ge \widetilde{N}(d,s) \ge \binom{d+[s/2]}{d} + \binom{d+[(s+1)/2]-1}{d},$$

где $N(d,s)$ — минимальное число точек s-дизайна на евклидовой сфере $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\widetilde{N}(d,s)$ — решение задачи линейного программирования для сферических дизайнов. Отсюда следует, что

$$c_d^* = 2dc_d^{1/d}/e \ge 1 + o(1), \quad d \to \infty,$$

где $c_d = \liminf_{s\to\infty} s^{-d}N(d,s)$. В. А. Юдин (1997) предложил другую нижнюю границу величины $\widetilde{N}(d,s)$, из которой вытекает, что $c_d^* \ge 4/e + o(1) \ge 1.4715 + o(1)$.

Мы доказываем, что

$$c_d^* \ge (\widetilde{\Delta}_d)^{-1/d} + o(1) \ge 1.5146 + o(1),$$

где $\widetilde{\Delta}_d$ — решение задачи линейного программирования для плотности сферической упаковки евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Как следствие, улучшены оценки взвешенных дизайнов на проективных пространствах и евклидовом шаре.

2. Получено параметрическое семейство X_{λ_1,λ_2} минимальных взвешенных 4-дизайнов, состоящих из 10 точек на сфере S^2а также некоторые близкие результаты. Распределение узлов семейства X_{λ_1,λ_2} определяются при помощи некоторых полиномов из $\mathbb{Z}[t,\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1}]$, полученных с использованием программ компьютерной алгебры. Это семейство в крайних случаях включает обладающие разной симметрией конструкции $X_{1/12,1/12}$ (А.С. Попов, 1994) и $X_{1/9,1/9}$ (Sangwoo Heo и Yuan Xu, 1999).
3. Доказаны квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа. Они обобщают квадратурные формулы по нулям функций Бесселя, впервые построенные C. Frappier и P. Oliver (1993). Квадратуры Бесселя отвечают интегральному преобразованию Фурье–Ганкеля. Даны другие примеры, связанные с интегральным преобразованием Якоби, рядом Фурье по ортогональным многочленам Якоби и общей задачей Штурма–Лиувилля с регулярным весом.

   Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля применяются для решения экстремальных задач, связанных с гармоническим анализом на локально компактных (евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, гиперболоиды $\mathbb{H}^n$) и компактных (тор $\mathbb{T}^n$, сфера S^n, проективные пространства) римановых многообразиях, где зональные сферические функции являются решениями задач Штурма–Лиувилля. В частности, квадратурные формулы Бесселя применяются в задачах для $\mathbb{R}^n$.
4. Изучена наилучшая константа в неравенстве Винера для положительно определенных периодических функций

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f|^2\,dx \le W_n(D)|D|^{-1}\int_D |f|^2\,dx, \quad D\subset\mathbb{T}^n.$$

   Н. Винер доказал, что $W_1([-\delta,\delta])<\infty$, $\delta\in(0,1/2)$. Затем H. Shapiro (1975) показал, что $W_1([-\delta,\delta])\le 2$. В многомерном случае E. Hlawka (1981) доказал, что $W_n(D)\le 2^n$, где D — центрально-симметричное выпуклое тело.

   Мы усиливаем неравенство Hlawka для евклидова шара и куба. Например, для шара D имеем $W_n(D)\le 2^{(0.401\ldots+o(1))n}$. Интересно, что при этом используется оценка Кабатянского–Левенштейна плотности упаковки Δ_n. В случае куба также предложена оценка снизу, близкая к оценке сверху. Для доказательства используются связь неравенства Винера с экстремальными задачами Турана и Дельсарта.
5. Изучены родственные многомерные экстремальные задачи Логана и Бомана для функций с компактным носителем преобразования Фурье (целых функций экспоненциального типа). В задаче Логана требуется минимизировать радиус шара по норме Минковского, вне которого функция с неотрицательным средним значениям может быть неположительной. В задача Бомана минимизируется второй момент неотрицательной функции, в вероятностном смысле являющейся функцией плотности распределения. Оценки снизу опираются на применение формул суммирования Пуассона по точкам невырожденных решеток $L\subset\mathbb{R}^n$, результат записывается через радиус покрытия L по Минковского $\|x\|_U$. Оценки сверху используют функции Юдина и записываются через первое собственное значение оператора Лапласа в шаре по норме Минковского $\|x\|_V$.

   Задачи Логана и Бомана имеют приложения в метрической геометрии (оценки параметров n-мерных решеток), теории приближений (точные неравенства Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$) и пространственной статистике (минимум дисперсии на классе характеристических в вероятностном смысле функций на $\mathbb{R}^n$).

Экстремальная задача Бомана решена для неотрицательных функций с компактным носителем преобразования Фурье–Ганкеля. Для доказательства этой теоремы применяются квадратурные формулы Бесселя на полуоси со степенным весом, точные для целых функций экспоненциального типа. При полуцелом $\alpha = n/2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, получено новое доказательство n-мерного результата W. Ehm, T. Gneiting и D. Richards (2004).

Также задача Бомана решена для функций с носителем преобразования Данкля в евклидовом шаре или параллелепипеде. При доказательстве используются инвариантность задачи относительно ортогональных преобразований, квадратурные формулы по нулям функций Бесселя.

6. Доказано точное неравенство Питта для преобразования Данкля в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ со степенными весами:

$$\||y|^{-\beta}\mathcal{F}_k(f)(y)\|_{2,d\mu_k} \le C(\beta,k)\||x|^{\beta}f(x)\|_{2,d\mu_k}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

В качестве приложения получен логарифмический принцип неопределенности для преобразования Данкля:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \ln(|x|)|f(x)|^2\,d\mu_k(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \ln(|y|)|\mathcal{F}_k(f)(y)|^2\,d\mu_k(y) \ge \left(\psi\Big(\frac{\lambda_k+1}{2}\Big) + \ln 2\right)\|f\|^2_{2,\mu_k}.$$

Также изучено введенное S. Ben Saïd, T. Kobayashi и B. Ørsted (2012) двупараметрическое семейство унитарных операторов

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,(2\langle k\rangle + d + a - 2)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big),$$

называемых (k,a)-обобщенным преобразованием Фурье и определяемых при помощи a-деформированного гармонического осциллятора Данкля $\Delta_{k,a} = |x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a$, $a > 0$, где Δ_k — лапласиан Данкля. В частных случаях такие операторы задают преобразования Фурье и Данкля. Сужение оператора $\mathcal{F}_{k,a}$ на радиальные функции дает a-деформированное преобразование Ганкеля $H_{\lambda,a}$.

Мы получили необходимые и достаточные условия для справедливости (L^p, L^q) неравенств Питта для a-деформированного преобразования Ганкеля. Кроме того, доказали двусторонние оценки типа Боаса и Загера для обобщенно монотонных функций. Также установлено точное неравенство Питта для преобразования $\mathcal{F}_{k,a}$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с соответствующими весами и получен логарифмический принцип неопределенности для $\mathcal{F}_{k,a}$.

7. Доказаны новые неравенства Питта для преобразования Фурье вида

$$\|u^{1/q}\widehat{f}\|_q \le C\|v^{1/p}f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

с радиальными и нерадиальными весами u и v, используя (restriction) неравенство Томаса–Стейна

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\widehat{f}(\omega)|^q\,d\sigma(\omega)\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

и его весовые аналоги. Также доказаны новые оценки Римана–Лебега и варианты принципа неопределенности для преобразования Фурье.

8. Доказана оценка оптимального аргумента в точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ для случая обобщенного модуля непрерывности, частным случаем которого является классический модуль непрерывности.

9. Установлено точное неравенство Джексона с оптимальным аргументом в модуле непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с гиперболическим весом. Для доказательства теоремы применяются квадратурные формулы Гаусса по нулям функций Якоби $\varphi_\sigma^{(\alpha,\beta)}(t)$, точные для целых функций экспоненциального типа.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.
2. *Горбачев Д.В.* Некоторые неравенства для дискретных положительно определенных функций // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 5–12.
3. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Труды института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 115–123.
4. Dmitry Gorbachev, Valery Ivanov, Sergey Tikhonov, Pitt's inequalities and uncertainty principle for generalized Fourier transform // arXiv:1507.06445 [math.CA], 2015; Journal of Approximation Theory. 2016. doi:10.1016/j.jat.2015.10.002 (принято к печати).
5. Dmitry Gorbachev, Valery Ivanov, Sergey Tikhonov, Sharp Pitt inequality and logarithmic uncertainty principle for Dunkl transform in L^2 // arXiv:1505.02958 [math.CA], 2015; International Mathematics Research Notices. 2016 (подано в печать).
6. *Gorbachev D.V.* Multidimensional extremal Logan's and Bohman's problems // In: Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory. Springer Basel (Birkhäuser), 2016 (принято к печати).
7. *De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S.* Pitt inequalities and restriction theorems for the Fourier transform // Revista Matemética Iberoamericana, 2016 (принята к печати).
8. *Горбачев Д.В.* Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L_2-неравенстве Джексона–Стечкина // Труды института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 83–91.
9. *Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A.* Optimal argument in the sharp Jackson inequality in the space L_2 with hyperbolic weight // Math. Notes. 2014, V. 96, no. 6. P. 904–913.
10. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
11. *Горбачев Д.В.* Нижние асимптотические оценки мощности дизайнов на сфере S^2 и шаре B^2 // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 11–25.
12. *De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S.* Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. V. 408, no. 2. P. 762–774.

3. Участие в конференциях, школах, тезисы докладов

1. *Gorbachev D., Ivanov V.* Extremal Bohman's problem for Dunkl transform // Book of abstracts, 5th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields. Budapest, MTA Renyi Institute, August 24–28, 2015. P. 6.
2. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Материалы XIII межд. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», Тула, 25–30 мая 2015. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2015. С. 262.
3. *Bondarenko A., Gorbachev D.* Asymptotic lower bound and parametric family of weighted spherical designs // Collection of abstracts, the 5th German-Russian Week of the Young Researcher «Discrete Geometry», Moscow Institute of Physics and Technology, September 6–11, 2015. P. 14.
4. *Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu.* Sharp Pitt inequality and logarithmic uncertainty principle for Dunkl transform in L^2 // Тезисы докл. межд. конф. «Функциональные пространства и теория приближения функций», МИАН, Москва, 25–29 мая 2015. М.: МИАН, 2015. С. 22–26.
5. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Тезисы докл. V межд. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов

и гармонического анализа и их приложения», Ростов-на-Дону, 26 апреля–1 мая 2015. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2015. С. 73–74.

6. *Горбачев Д.В.* Неравенства для дискретных положительно определенных функций // Материалы межд. конф. «Современные методы теории краевых задач: Воронежская весенняя математическая школа, Понтрягинские чтения–XXVI», Воронеж, 3–9 мая 2015. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. С. 79–80.
7. *Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu.* Sharp Pitt inequality and logarithmic uncertainty principle for Dunkl transform in L^2 // Материалы 12-й межд. конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 27 июня–4 июля 2015. Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казанское математическое общество. Казань: изд-во АН Республики Татарстан, 2015. Т. 51. С. 505–511.
8. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье-Ганкеля // Материалы межд. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы: Воронежская весенняя математическая школа», Воронеж, 27 января–2 февраля 2015. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. С. 39–40.
9. «Летняя научная Школа-конференция С.Б. Стечкина по теории функций и теории аппроксимаций и их приложениям», Ильменский государственный заповедник, Миасс, 1-10 августа 2014, Институт математики и механики Уральского отделения РАН. Тема доклада «Квадратурные формулы на полуоси», лекция «l_1-Оптимизация».
10. *Горбачев Д.В.* Оценка оптимального аргумента в точном $L_2(\mathbb{R}^n)$-неравенстве Джексона–Стечкина // Тезисы докл. IV межд. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», Ростов-на-Дону, 27 апреля–1 мая 2014. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. С. 52–53.
11. *Де Карли Л., Горбачев Д.В., Тихонов С.Ю.* Точная константа в неравенстве Питта для преобразований Фурье и Ганкеля // Тезисы докл. VIII межд. симпозиума «Ряды Фурье и их приложения», Новороссийск, 27 мая–3 июня 2014. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. С. 15–16.
12. *Вепринцев Р.А., Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с гиперболическим весом // Материалы XV межд. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 15–19 сентября 2014. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 24–28.
13. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма-Лиувилля // Материалы XV межд. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 15–19 сентября 2014. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 29–36.
14. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям функций Якоби // Материалы XV межд. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 15–19 сентября 2014. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 36–42.
15. Gorbachev D. New asymptotic lower bound for cardinality of spherical designs // Abstracts. 14th International Conference in Approximation Theory, April 7–10, 2013. San Antonio, Texas: Vanderbilt University, 2013. P. 26.
16. «Summer school on Discrete and Computational Geometry», 22 июля–02 августа 2013, Демино, Ярославль. Тема лекции «LP-bounds for spherical codes and designs».
17. *Gorbachev D.* Radial positive definite functions and best approximation in $L^2(\mathbb{R}^n)$ // Abstracts. 9th International ISAAC Congress, August 5–9, 2013. Krakow: Pedagogical University, 2013. P. 83–84.
18. *Gorbachev D.* Asymptotic lower bound for cardinality of weighted spherical designs // Abstracts. 4th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, August 25–31, 2013. Budapest: MTA Renyi Institute, 2013. P. 3.

Доклады на семинарах:

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, семинары «Экстремальные задачи для положительно определенных функций» (19 декабря 2013, 22 сентября 2015, 21 июля 2013), «Компьютерная визуализация» (22 сентября 2015). МГУ им. М.В. Ломоносова, семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» (02 декабря 2013).

4. Работа в научных центрах и международных группах

Совместные исследования с А.В. Бондаренко (Тронхейм, Норвегия) и С.Ю. Тихоновым (Барселона, Испания) по теме «Sharp Remez Inequalities» в рамках программы «Oberwolfach Research in Pairs» в Математическом исследовательском институте Обервольфаха (MFO), Германия, 06–19 декабря 2015.

Совместные исследования с профессорами C. Thiele и С. Тихоновым в рамках проекта «Harmonic Analysis and Partial Differential Equations» в Математическом институте им. Хаусдорфа университета Бонна, Германия, 21–31 августа 2014.

Руководитель госзадания № 5414ГЗ Министерства образования и науки РФ по теме «Экстремальные задачи гармонического анализа Фурье и Данкля».

Исполнитель гранта РФФИ № 13-01-00045 «Гармонический анализ Данкля и экстремальные задачи теории приближений и теории функций» в коллективе математиков механико-математического факультета Тульского государственного университета под руководством В.И. Иванова.

5. Педагогическая деятельность

В 2013–2015 гг. преподаю в должности профессора на кафедре прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета. В весеннем семестре читаю курсы «Вариационное исчисление и оптимальное управление», «Методы защиты информации», веду практические и лабораторные занятия по ним. В осеннем семестре читал курсы «Методы оптимизации», «Теория приближений», вел практические занятия по ним.

Научное руководство:

А.П. Офицеров, аспирант ТулГУ первого года обучения (2015).

С.С. Свистунов, аспирант ТулГУ. Защитил кандидатскую диссертацию «Интерактивный рендеринг при помощи сферических дизайнов для низкочастотного окружающего освещения» 18 декабря 2013 г. в Совете ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». Утвержден в степени кандидата физико-математических наук в мае 2014 г.

Также под мои руководством продолжают обучение несколько студентов магистратуры и дипломников ТулГУ.

Являюсь научным руководителем программы магистратуры 01.04.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности».

Монографии и учебные пособия:

1. *Горбачев Д.В., Свистунов С.С.* Моделирование интерактивного освещения в 3D-графике и сферические дизайны. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 156 с.
2. *Горбачев Д.В.* Численные методы решения экстремальных задач: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 114 с.
3. *Горбачев Д.В.* Лекции по вариационному исчислению: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 112 с.