Отчет С. Горчинского
по гранту фонда "Династия" за 2015 год

Результаты, полученные в 2015 году

Хорошо известно, что все комплексные неприводимые представления нильпотентных конечных групп мономиальны, т.е. индуцированы с характеров подгрупп. А. А. Кириллов [6] и Ж. Диксмье [2, теорема 2] независимо доказали аналогичное утверждение для унитарных неприводимых представлений связных нильпотентных групп Ли.

Позже в статье [1] Я. Браун привел утверждение о том, что унитарные неприводимые представления нильпотентых (дискретных) конечно порожденных групп мономиальны тогда и только тогда, когда они являются представлениями с конечным весом. Напомним, что представление π группы G называется представлением с конечным весом, если существуют подгруппа $H \subset G$ и характер χ группы H, для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_H(\chi, \pi|_H)$ ненулевое и конечномерное. К сожалению, в доказательстве Брауна содержался существенный пробел.

На пленарном докладе на Международном конгрессе математиков в 2010 году А. Н. Паршин [3, § 5.4(i)] (см. также [4, стр. 296]) сформулировал в качестве гипотезы следующее утверждение: критерий Брауна верен для всех комплексных неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп, без какой-либо топологической структуры на представлениях. В данном контексте под мономиальным представлением подразумевается представление, конечно индуцированное с характера некоторой подгруппы.

С. Горчинский совместно с И. Белошапкой [5] доказали гипотезу Паршина, а также исправили ошибку в доказательстве Брауна. Кроме того, ими получен следующий новый критерий неприводимости для индуцированных представлений, использованный при доказательстве данной гипотезы. Пусть H — нормальная подгруппа произвольной не более чем счетной группы G, а ρ — комплексное неприводимое представление группы H. Тогда конечно индуцированное представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_G\big(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\big) = \mathbb{C}$.

Гротендик предложил изучать группу, порожденную классами изоморфизма алгебраических многообразий $[X]$, с соотношениями, заданными разрезаниями многообразий: если $Z \subset X$ — замкнутое многообразие, то $[X] = [Z] + [X \smallsetminus Z]$. Данная группа названа с тех пор группой

Гротендика алгебраических многообразий и обозначается $K_0(Var)$. Бондал, Ларсен и Лунц построили категорную меру для многообразий над полем характеристики нуль, т.е. гомоморфизм колец $\mu\colon K_0(Var) \to \Delta$, где Δ обозначает группу Гротендика насыщенных dg-категорий, порожденную классами эквивалентности dg-категорий с соотношениями, заданными полуортогональными разложениями. При этом классу гладкого проективного многообразия X сопоставляется класс производной категории когерентных пучков на нем $D^b(\operatorname{coh} X)$ (с оснащением). Аналогично можно определить эквивариантный категорный класс $\mu_G(X) \in \Delta$ для многообразия X с действием конечной группы G.

Хорошо известные результаты Атьи и Сигала об орбифолдных когомологиях мотивируют следующий вопрос: имеется ли равенство между $\mu_G(X)$ и $\mu(X/^{ex}G)$ в кольце Δ? Здесь $X/^{ex}G$ обозначает расширенный фактор, т.е. фактор по группе G многообразия, состоящего из пар (x, g), где $x \in X$ и $g \in G$ такие, что $g(x) = x$.

С. Горчинский совместно с Д. Бергом, М. Ларсеном и В. Лунцем доказали, что имеется равенство $\mu_G(X) = \mu(X/^{ex}G)$ при выполнении ряда достаточно явно проверяемых условий на G и X. В частности, данные условия выполнены для действия симметрической группы Σ_n на $X^{\times n}$ для любого многообразия X. Как следствие получается доказательство гипотезы совместимости Галкина–Шиндера о сравнении дзета-функции Капранова с категорной дзета-функции.

Кроме того, Горчинским с соавторами был построен контрпример, утверждающий, что в общем случае равенство $\mu_G(X) = \mu(X/^{ex}G)$ не выполняется. Для этого была построена схема Севери–Брауэра $X \to B$, для которой геометрические слои изоморфны $\mathbb{P}^n$, но при этом кручение в топологической K-группе $K_1^{top}(X)$ отличается от кручения в группе $K_1^{top}(B)^{\oplus(n+1)}$. Такая схема Севери–Брауэра получается при помощи естественного обобщения на случай многообразий известной конструкции циклических центральных простых алгебр и связанных с ними многообразий Севери–Брауэра.

Опубликованные и поданные в печать работы

S. Gorchinskiy, A. Rosly, *A polar complex for locally free sheaves*, International Mathematics Research Notices, **2015**:10 (2015), 2784–2829.

И. В. Белошапка, С. О. Горчинский, *Неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп*, Математический сборник,

207:1 (2016) (в печати).

Участие в конференциях и школах

Ежегодная мемориальная конференция памяти члена-корреспондента РАН А. Н. Тюрина, МИАН, Москва, Россия, 26.10.2015.

Конференция “Workshop on Projective Algebraic Geometry (celebrating Fyodor Zak’s 65th birthday)”, НИУ ВШЭ, Москва, Россия, 07.09.2015-12.09.2015.

Летняя школа-семинар у В. Лунца, Московская область, Россия, 20.07.2015-25.07.2015, курс лекций “Введение в p-адические периоды”.

Международная конференция по алгебраической геометрии, Магадан, Россия, 07.12.2015-11.15.2015.

Работа в научных центрах и международных группах

отсутствует

Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

Руководство общеинститутским семинаром МИАН “Коллоквиум МИАН”

Руководство защитой дипломной работы магистра математического факультета ВШЭ Д.Ю. Щедриной

Краткий итог трех лет

Были получены результаты в области многомерных аделей, итерированных рядов Лорана, представлений нильпотентных групп, категорной меры на группе Гротендика многообразий. При этом темы исследований были изменены по сравнению с тем, что было в исходной заявке. Было опубликовано 8 статей, проведено руководство защитой бакалаврского и магистерского дипломов Д. Ю. Щедриной на математическом факультете ВШЭ, был прочитан семестровый курс лекций в НОЦ МИАН, результаты докладывались на многочисленных отечественных и международных конференциях.

Список литературы

[1] I. D. Brown, *Representation of finitely generated nilpotent groups*, Pacific J. Math., **45**:1 (1973), 13–26.

[2] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents. I*, Amer. J. Math., **81** (1959), 160–170.

[3] A. N. Parshin, *Representations of higher adelic groups and arithmetic*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **I** (2010), 362–392, Hindustan Book Agency, New Delhi.

[4] С. А. Арналь, А. Н. Паршин, *О неприводимых представлениях дискретных групп Гейзенберга*, Матем. заметки, **92**:3 (2012), 323–330.

[5] И. В. Белошапка, С. О. Горчинский, *Неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп*, Матем. сб., **207**:1 (2016).

[6] А. А. Кириллов, *Индуцированные представления нильпотентных групп Ли*, ДАН СССР, **128** (1959), 886–889.