Отчёт М.В. Игнатьева для Фонда «Династия»

Основные результаты, полученные в 2014 г.

1. Коприсоединённые орбиты и частичные порядки. Пусть G — комплексная редуктивная группа, T — максимальный тор в ней, B — борелевская подгруппа, содержащая тор T, U — унипотентный радикал группы B, Φ — система корней группы G относительно тора T, Φ^+ — множество положительных корней относительно группы B. Группы B и U действуют на алгебре Ли $\mathfrak{n}$ группы U присоединённым образом; двойственное действие этих групп на сопряжённом пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется *коприсоединённым.* Орбиты коприсоединённого действия играют ключевую роль в теории представлений групп B и U согласно методу орбит, открытому А.А. Кирилловым. Полная классификация коприсоединённых орбит в общем случае является дикой задачей.

Практически все орбиты, сколь-нибудь полно изученные к настоящему времени, относятся к так называемым орбитам, ассоциированным с расстановками ладей. *Расстановкой ладей* называется подмножество $D \subset \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями. Выберем в $\mathfrak{n}$ базис, состоящий из корневых векторов e_α, $\alpha \in \Phi^+$; пусть $\{e_{\alpha^*},\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. Орбитой, *ассоциированной* с расстановкой D, мы называем B-орбиту Ω_D элемента

$$f_D = \sum_{\beta \in D} e_\beta^*.$$

Ранее мной совместно с А.С. Васюхиным были найдены размерности таких орбит для $\Phi = A_{n-1}$. Отождествим A_{n-1}^+ с подмножеством $\mathbb{R}^n$ вида $\{\epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Пусть $D = \{\epsilon_{i_1} - \epsilon_{j_1}, \ldots, \epsilon_{i_t} - \epsilon_{j_t}\}$, $1 < i_1 < \ldots < i_t$. Нами было, в частности, доказано, что $\dim \Omega_D \leqslant l(w_D)$, где w_D — подстановка из S_n, равная произведению транспозиций $(i_1, j_1) \ldots (i_s, j_s)$, а $l(w_D)$ — её длина, то есть количество инверсий в ней. (Ранее для ортогональных подмножеств D в A_{n-1} мной было доказано, что $\dim \Omega_D = l(w)$.)

Корме того, нами был исследован частичный порядок на множестве расстановок ладей в A_{n-1}^+, индуцированный примыканиями ассоциированных B-орбит. Будем писать $D \leqslant D'$, если для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется условие $D[i,j] \leqslant D'[i,j]$, где

$$D[i,j] = \#\{\epsilon_a - \epsilon_b \in D \mid a \leqslant i,\ b \geqslant j\}.$$

Оказывается, что $D \leqslant D'$ является необходимым условием для того, чтобы орбита Ω_D лежала в замыкании орбиты $\Omega_{D'}$ (для ортогональных подмножеств эти условия эквивалентны, более того, оба они эквивалентны тому, что $w_D \leqslant w_{D'}$ в смысле порядка Брюа.) Также для каждой расстановки D нами было описано множество таких расстановок D', что $D' < D$, но не существует расстановки D'', для которой $D' < D'' < D$.

В этом году мы совместно с И.В. Барышниковым продолжили изучение этого частичного порядка. Мы доказали, что условие $D \leqslant D'$ эквивалентно тому, что $\kappa_D \leqslant \kappa_{D'}$ в смысле порядка Брюа, где κ_D — *инволюция Керова*, связанная с расстановкой D. (По определению, κ_D — инволюция в S_{2n-2}, равная произведению $(2i_1 - 2, 2j_1 - 1) \ldots (2i_s - 2, 2j_s - 1)$.) Используя этот факт мы показали, что частично упорядоченное множество расстановок ладей является градуированным (то есть все максимальные цепи в нём имеют одну и ту же длину) и явно построили функцию ранга. (Ранее аналогичные результаты были получены для ортогональных подмножеств во всех классических группах Ф. Инчитти.) Сейчас мы работаем над переносом этих результатов на другие серии корней.

2. Коприсоединённые орбиты и примитивные идеалы. Для алгебр Ли есть версия метода орбит, разработанная Ж. Диксмье. Она устанавливает биекцию между множеством коприсоединённых орбит и множеством примитивных идеалов (то есть аннуляторов простых модулей) универсальной обёртывающей алгебры. Пусть, как и выше, $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли группы U, $U(\mathfrak{n})$ — её универсальная обёртывающая алгебра. Выберем произвольную линейную форму $f \in \mathfrak{n}^*$ и любую её поляризацию $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{n}$ (это подалгебра, одновременно являющаяся максимальным f-изотропным подпространством; последнее условие означает, что $f([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{p}$). Пусть W — одномерное представление алгебры $\mathfrak{p}$ вида $x \mapsto f(x)$,

$$V = U(\mathfrak{n}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W$$

— индуцированное представление и $J = \operatorname{Ann} V \subset U(\mathfrak{n})$ — его аннулятор.

Оказывается, что представление V неприводимо (а значит, идеал J примитивен), $J = J(f)$ не зависит от выбора $\mathfrak{p}$, $J(f) = J(f')$ тогда и только тогда, когда f и f лежат на одной U-орбите, и отображение $f \mapsto J(f)$ индуцирует биекцию между $\mathfrak{n}^*/U$ и множеством примитивных идеалов в $U(\mathfrak{n})$, называемую отображением Диксмье. Используя известное описание центра алгебры $U(\mathfrak{n})$ в терминах каскадов Костанта ортогональных корней, мы с И. Пенковым доказали, что для случаев A_{n-1} и C_n если идеал $J(f)$ центрально порождён, то орбита f регулярна, то есть имеет максимально возможную размерность; для A_{n-1} это биекция между множеством центрально порождённых идеалов и множеством регулярных орбит. Более того, мы явно предъявили образующие произвольного центрально порождённого идеала.

Мы также перенесли эти результаты на следующий класс бесконечномерных алгебр. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\infty)$, $\mathfrak{o}(\infty)$ или $\mathfrak{sp}(\infty)$, то есть прямой предел естественно вложенных классических алгебр

$$\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \ldots$$

соответствующего типа, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, состоящая из всех диагональных матриц в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$. Тогда, как и в конечномерном случае, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — сумма одномерных корневых подпространств. Отметим, что в этой ситуации уже не все подалгебры $\mathfrak{b}$ (и, соответственно, $\mathfrak{n}$) сопряжены между собой. Тем не менее, для каждой из них нам с И. Пенковым удалось получить описание центра $\mathfrak{n}$ в терминах аналогов каскадов Костанта, которые могут оказаться бесконечными в зависимости от класса сопряжённости алгебры $\mathfrak{n}$. В частности, мы показали, что, как и в конечномерном варианте, центр $U(\mathfrak{n})$ всегда является кольцом многочленов (возможно, от бесконечного числа переменных).

С помощью этого мы получили описание всех центрально порождённых примитивных идеалов в $U(\mathfrak{n})$ для специальной линейной и симплектической алгебры. А именно, назовём коприсоединённую $\exp(\mathfrak{n})$-орбиту формы $f \in \mathfrak{n}^*$ *регулярной*, если, начиная с какого-то i, её пересечение с каждой $\mathfrak{g}_i$ — регулярная орбита. Для некоторой линейной формы f на регулярной орбите нам удалось построить поляризацию $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$; теперь мы можем дословно повторить конструкцию идеала $J(f)$. Несложно проверить, что $J(f)$ не зависит от выбора формы f на орбите и от выбора поляризации для f. Оказывается, что если примитивный идеал J в $U(\mathfrak{n})$ центрально порождён, то он имеет вид $J(f)$ для некоторой формы f, орбита которой регулярна; более того, мы в состоянии явно предъявить его образующие. Сейчас идёт работа над переносом этих фактов на случай ортогональной алгебры.

Это можно рассматривать как первые шаги на пути построения отображения Диксмье для $U(\mathfrak{n})$ и переноса метод орбит на указанный класс бесконечномерных алгебр.

3. Геометрия многообразий Шуберта. Вернёмся к обозначениям первого пункта. Пусть G — комплексная редуктивная группа, T — максимальный тор в ней, B — борелевская подгруппа, содержащая тор T, U — унипотентный радикал группы B, Φ — система корней группы G относительно тора T, Φ^+ — множество положительных корней относительно группы B. Обозначим через $\mathcal{F} = G/B$ многообразие флагов, а через X_w — подмногообразие Шуберта в $\mathcal{F}$, соответствующее элементу w группы Вейля W системы корней Φ. Важная задача — описание касательного конуса к X_w в точке $p = eB$. Под *неприведённым* касательным конусом C_w мы понимаем спектр градуированной алгебры R, ассоциированной с фильтрацией локального кольца точки p на многообразии X_w степенями максимального идеала. Также интерес представляет описание *приведённого* касательного конуса C_w^{red}. Отметим, что касательные конусы тесно связаны с коприсоединёнными орбитами в следующем смысле. Раз $\mathcal{F} = G/B$, то касательное пространство $T_p\mathcal{F}$ естественно отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{n}^*$, причём легко показать, что действие B сопряжениями на $\mathcal{F}$ индуцирует в точности коприсоединённое действие на $T_p\mathcal{F} \cong \mathfrak{n}^*$ и касательные конусы инвариантны относительно этого действия. Таким образом, касательный конус $C_w^{\mathrm{red}} \subseteq T_pW_w \subseteq T_p\mathcal{F}$ есть объединение коприсоединённых B-орбит.

В 2011 г. Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов вычислили касательные конусы для $\Phi = A_{n-1}$ при $n \leqslant 5$. На основе этих вычислений А.Н. Панов сформулировал следующую гипотезу: если w, w' — произвольные инволюции в W, то их касательные конусы различны. Здесь можно рассматривать как приведённые касательные конусы, так и неприведённые; обе задачи представляют интерес. Эта гипотеза была доказана мной совместно с Д.Ю. Елисеевым в 2012 г. для неприведённых касательных конусов для систем корней, неприводимые компоненты которых имеют тип A_{n-1}, F_4 и G_2. В прошлом году мы с А.А. Шевченко доказали эту гипотезу для систем корней типа B_n и C_n.

Основным инструментом в доказательстве являются так называемые *многочлены Костанта–Кумара*. По определению, для $w \in W$ это элемент алгебры регулярных функций на алгебре Ли тора T, равный

$$d_w = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \alpha \cdot \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\delta_1}\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\delta_1}s_{i_2}^{\delta_2}\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\delta_1}\ldots s_{i_l}^{\delta_l}\alpha_{i_l}}.$$

Здесь $s_1, \ldots, s_n$ — простые отражения в W, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — соответствующие простые корни в Φ^+, $w = s_{i_1}\ldots s_{i_l}$ — произвольное фиксированное приведённое разложение w, а суммирование ведётся по всем наборам $(\delta_1, \ldots, \delta_l)$ из нулей и единиц, для которых $s_{i_1}^{\delta_1}\ldots s_{i_l}^{\delta_l} = \mathrm{id}$. На самом деле, d_w зависит только от C_w, так что достаточно было доказать, что $d_w \neq d_{w'}$ для разных инволюций w, w'.

Рассуждая аналогичным образом, мы с А.А. Шевченко в этом году доказали гипотезу для базисных инволюций в случае D_n. (Инволюция w называется *базисной*, если не существует такого i, что $w(\epsilon_i) = -\epsilon_i$ при стандартной реализации Φ как подмножества в $\mathbb{R}^n$.) Отметим также, что, опираясь на мои результаты об орбитах, ассоциированных с ортогональными расстановками ладей, М.А. Бочкарёв доказал, что для систем корней типа A_{n-1} и C_n для разных инволюций приведённые касательные конусы тоже будут различны. Совместно с А.А. Шевченко нам удалось доказать аналогичные результаты для базисных инволюций в случае D_n. Разумеется, из этого вытекает наш первый результат, но мы рассчитываем, ииспользуя многочлены Костанта–Кумара, получить доказательство несовпадения неприведённых касательных конусов для всех инволюций в случае D_n, в то время как как методы М.А. Бочкарёва не работают, если инволюций не является базисной. Также сейчас мы рассматриваем базисные инволюции для систем корней типа E.

Научные публикации в 2014 г.

1. М.В. Игнатьев, А.А Шевченко. О касательных конусах к многообразиям Шуберта типа D_n. Алгебра и анализ, submitted, см. также arXiv: `math.AG/1410.4025`.

2. M.V. Ignatyev, A.S. Vasyukhin. Rook placements in A_n and combinatorics of B-orbit closures. J. Lie Theory **24** (2014), no. 4, 931–956.

3. M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, submitted, see also arXiv: `math.AG/1310.3166`.

4. М.В. Игнатьев. Центрально порождённые идеалы универсальных обёртывающих алгебр локально нильпотентных алгебр Ли. Четвёртая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Тезисы докладов. М.: Издательство Московского университета, с. 25–27.

Школы, конференции и семинары

1. Четвёртая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, январь-февраль 2014 г. Название доклада: «Центрально порождённые идеалы универсальных обёртывающих алгебр локально нильпотентных алгебр Ли».

2. Научный семинар кафедры алгебры и геометрии (рук. проф. А.Н. Панов). Самарский государственный университет, Самара, апрель 2014. Название доклада: «Метод Макки для конечных групп».

3. Seminar on Algebra, Geometry and Physics (рук. проф. Ю.И. Манин). Max Planck Institute for Mathematics, Бонн, Германия, сентябрь 2014 г. Название доклада: «Bruhat order on involutions and combinatorics of coadjoint orbits».

4. Семинар «Algebra, Lie Theory, and Geometry» (рук. проф. И. Пенков). Jacobs University, Бремен, октябрь 2014 г. Название доклада: «Infinite Kostant cascades».

5. Семинар «Группы Ли и теория инваринтов» (рук. проф. Э.Б. Винберг, проф. А.Л. Онищик, проф. И.В. Аржанцев, доц. Д.А. Тимашёв). Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, декабрь 2014. Название доклада: «Бесконечные каскады Костанта».

6. Научный семинар кафедры алгебры и геометрии (рук. проф. А.Н. Панов). Самарский государственный университет, Самара, декабрь 2014. Название доклада: «Бесконечные каскады Костанта».

Работа в международных центрах и научных группах

Научный визит в Max Planck Institute for Mathematics, Бонн, Германия, в сентябре–октябре 2014 г., работа над переносом метода орбит на максимальные локально нильпотентные подалгебры в бесконечномерных алгебрах Ли, являющихся прямыми пределами классических простых алгебр Ли.

Педагогическая деятельность

1. В весеннем семестре 2013/2014 учебного года я прочёл спецкурсы «Группы и алгебры Ли» и «Алгебраические группы» студентам 5 курса механико-математического факультета Самарского государственного университета.

2. В августе 2014 г. на VI Студенческой летней математической школе, проводившейся СамГУ для студентов и аспирантов механико-математического и физического факультетов, я прочёл мини-курс «Когомологии алгебр Ли».

3. В 2014 г. я руководил дипломными работами двух студентов СамГУ — А.С. Васюхина и А.А. Шевченко. А.А. Шевченко сейчас учится в аспирантуре на кафедре алгебры и геометрии СамГУ под руководством проф. А.Н. Панова.

4. В течение всего года я был руководителем учебных семинаров для студентов СамГУ «Введение в теорию гомологий» и «Введение в теорию представлений».

5. В 2014 г. я опубликовал в журнале «Математическое просвещение» статью «Квантовая комбинаторика» (Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 18, с. 66–111). В ней в доступной старшекласснику форме излагаются основы теории q-аналогов и их связь с геометрией векторных пространств над конечными полями и параболическими подгруппами группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

6. Также я стал соавтором опубликованного в 2014 г. издательством «Самарский университет» учебного пособия «Основные структуры алгебры» (совм. с С.Ю. Поповым), где я написал главу, посвящённую изложенной в виде задач классификации неприводимых предсталвений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ и группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.