Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2014 год

Антон Изосимов

1 Научные результаты

Начнем с конструкции, возникшей в работах А.Г. Реймана и М.А. Семенова-Тян-Шанского [1, 2], П. Ван Мербеке и Д. Мамфорда [3], а также М.Ȧдлера и П. Ван Мербеке [4]. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=0}^{m} L_i \lambda^i : L_i \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),\ L_m = J \right\}$$

матричнозначных полиномов фиксированной степени m с фиксированным коэффициентом J при старшей степени. Далее мы будем предполагать, что матрица J имеет простой спектр.

Пространство $\mathcal{L}$ является пуассоновым многообразием. Скобка Пуассона на этом пространстве является ограничением линейной r-матричной скобки, заданной на двойственном пространстве к алгебре петель $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$; подробности см. в [1, 2]. Кроме того, на пространстве $\mathcal{L}$ имеется естественная интегрируемая система, то есть полный набор коммутирующих гамильтонианов. Эти гамильтонианы имеют вид

$$H_\psi(L) = \mathrm{Res}_{\lambda=0}\, \lambda^{-1} \operatorname{Tr} \psi(L(\lambda), \lambda^{-1}),$$

где $\psi = \psi(\mu, \lambda^{-1})$ – произвольный многочлен от переменных μ, λ^{-1}, а $\psi(L(\lambda), \lambda^{-1})$ – матрица, полученная в результате подстановки в этот многочлен матричнозначного полинома $L(\lambda)$ вместо переменной μ. Обозначение Tr означает взятие следа, а $\mathrm{Res}_{\lambda=0}$ – взятие коэффициента при λ^{-1}, то есть вычета в нуле. Соответствующее гамильтониану H_ψ гамильтоново поле имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(\lambda) = [L(\lambda), \phi(L(\lambda), \lambda^{-1})_+], \tag{$\star$}$$

где $\phi = \partial\psi / \partial\mu$, а $(\dots)_+$ означает взятие только тех слагаемых, которые имеют неотрицательную степень по λ. Более детальное описание этой конструкции см. в работах [1–4].

Заметим, что построенная интегрируемая система является достаточно универсальной в том смысле, что большинство известных конечномерных интегрируемых систем получается из нее ограничением на некоторое подпространство $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$. Например, рассмотрим подпространство $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$ состоящее из матричнозначных многочленов $L(\lambda)$, коэффициенты которых являются вещественными кососимметрическими матрицами. Как легко видеть, пространство $\mathcal{V}$ инвариантно относительно потока ($\star$) тогда и только тогда, когда многочлен ϕ имеет вещественные коэффициенты и является нечетным по μ. Рассматривая потоки ($\star$) для всех таких многочленов ϕ, мы получаем интегрируемую систему на $\mathcal{V}$. Если теперь взять $m = 2$ и $n = 3$, то окажется, что полученная система – это волчок Лагранжа, также известный как юла, см. [5].

Вернемся теперь к системе на пространстве $\mathcal{L}$. Для каждого полинома $L \in \mathcal{L}$, можно рассмотреть алгебраическую кривую

$$C_L = \{\det(L(\lambda) - \mu E) = 0\},$$

называемую спектральной кривой. Заметим, что коэффиценты многочлена $\det(L(\lambda) - \mu E)$ являются многочленами от функций H_ψ и наоборот. Тем самым, при эволюции полинома L

согласно любому из уравнений ($\star$) спектральная кривая C_L остается неизменной. Рассмотрим теперь множество

$$S_C = \{L \in \mathcal{L} : C_L = C\}.$$

Множество S_C является алгебраическим многообразием, инвариантным относительно потоков ($\star$). В случае, когда кривая C гладкая, а матрица J имеет простой спектр, описание многообразия S_C хорошо известно. Для начала заметим, что необходимым условием непустоты S_C является равенство

$$\lim_{z \to 0} \left(\chi_C \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z^m} \right) z^{nm} \right) = \det(J - w\mathrm{E}), \tag{$\star\star$}$$

где χ_C – полином, задающий кривую C. Предположим, что условие ($\star\star$) выполнено. Тогда S_C является гладким многообразием, которое можно отождествить с тотальным пространством главного $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ расслоения над открытым по Зарисскому подмножеством в якобиане кривой C, см. [2, 3, 6]. Более «явное» описание было получено в работе Л. Гаврилова [7]: если кривая C гладкая, то S_C можно отождествить с открытым подмножеством в обобщенном якобиане кривой C с отождествленными точками на бесконечности. В обоих описаниях отображение из S_C в якобиан линеаризует уравнения ($\star$), что позволяет явно выписать их решения в терминах тэта-функций.

Моим первым результатом является описание множества S_C в случае, когда кривая C является кривой с двойными точками, возможно, приводимой. Пусть C - кривая с двойными точками, C_∞ – кривая, полученная из C компактификацией и отождествлением точек на бесконечности.

Теорема 1 (А. Изосимов [8]). *Пусть C - кривая с двойными точками, удовлетворяющая условию ($\star\star$). Тогда многообразие S_C приводимо если и только если кривая C приводима. Все неприводимые компоненты S_C имеют одинаковую размерность. Для каждой неприводимой компоненты $S_i \subset S_C$ существует открытое по Зарисскому подмножество $U_i \subset S_i$, биголоморфно эквивалентное открытому подмножеству в обобщенном якобиане кривой C_∞. Отображение, осуществляющее отождествление U_i с открытым подмножеством в якобиане C_∞, линеаризует уравнения движения.*

Для явного описания множества неприводимых компонент многообразия S_C нам понадобятся некоторые определения. Пусть $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ – приводимая кривая с двойными точками. Отображение $d \colon \{X_1, \dots, X_k\} \to \mathbb{Z}$, то есть сопоставление каждой неприводимой компоненте кривой X целого числа, называется мультистепенью на кривой X. Суммарная степень мультистепени d – это число

$$|d| = \sum_{X_i \in \Sigma} d(X_i).$$

Подкривая $Y \subset X$ – это объединение любого числа неприводимых компонент кривой X. Для любой подкривой $Y \subset X$ и любой мультистепени d на X можно естественным образом ограничить d на Y. Пусть g – арифметический род кривой X. Назовем мультистепень d на X однородной, если ее полная степень равна g, и для любой подкривой $Y \subset X$ имеет место неравенство

$$\Big| d\,|_Y \Big| \geq g(Y),$$

где $d\,|_Y$ – ограничение d на Y, а $g(Y)$ – арифметический род Y. Несложно видеть, что для любой кривой X с двойными точками существует хотя бы одна однородная мультистепень, число однородных мультистепеней конечно, а кроме того множество всех однородных мультистепеней есть множество целых точек в некотором выпуклом многограннике $P(X) \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 2 (А. Изосимов [8]). *Пусть C - кривая с двойными точками, удовлетворяющая условию ($\star\star$). Тогда существует взаимнооднозначое соответствие между множеством неприводимых компонент многообразия S_C и множеством однородных мультистепеней на кривой C_∞.*

Отождествление между множеством неприводимых компонент и множеством однородных мультистепеней на C_∞ строится следующим образом. Пусть S_i – неприводимая компонента S_C, а $L \in S_i$ – точка общего положения. Для каждой точки $(\lambda, \mu) \in C$ имеем

$$\det(L(\lambda) - \mu \mathrm{E}) = 0.$$

При этом для почти всех $(\lambda, \mu) \in C$ ядро оператора $L(\lambda) - \mu\mathrm{E}$ одномерно. Тем самым, мы получаем линейное расслоение над открытым всюду плотным подмножеством $U \subset C$. Стандартным образом показывается, что это расслоение единственным образом продолжается до голоморфного линейного расслоения над всей кривой C. Возьмем дивизор этого расслоения. Тогда мультистепень этого дивизора и дает нам искомое отображение из множества неприводимых компонент во множество однородных мультистепеней (то есть, в частности, утверждается, что реализуются все однородные мультистепени и только они).

Проиллюстрируем утверждение теоремы 2 на примере. Пусть в определении пространства $\mathcal{L}$ число m равно единице. Тогда $\mathcal{L}$ можно естественно отождествить с $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, а построенная выше интегрируемая система совпадает с системой, получаемой методом сдвига аргумента, предложенным А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко [9]. Пусть

$$J = \mathrm{diag}(j_1, \ldots, j_n), \quad C = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda j_i - \mu) = 0 \right\},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Другими словами, кривая C представляет из себя n прямых $l_1, \ldots, l_n$. Будем предполагать, что эти прямые находятся в общем положении.

Кривая C_∞ получается из C склейкой точек на бесконечности. Как нетрудно видеть, многогранник $P(C_\infty)$ представляет из себя пермутоэдр, то есть выпуклую оболочку точек вида

$$(\sigma(0), \ldots, \sigma(n-1)),$$

где σ – произвольная перестановка на множестве $0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, число однородных мультистепеней на C_∞, а тем самым и число компонент S_C, равно числу целых точек в пермутоэдре или, что то же самое, числу лесов на n вершинах. Например, при $n = 3$ многообразие S_C имеет 7 компонент.

Заметим, что компоненты S_C, соответствующие вершинам пермутоэдра, нетрудно указать явно. Пусть $\succ$ – любое отношение порядка на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим борелевскую подалгебру

$$\mathfrak{b}_\succ = \{ L \in \mathfrak{gl}(n) \mid L_{ij} = 0 \ \forall\ i \succ j \}$$

и соответствующую максимальную нильпотентную подалгебру

$$\mathfrak{n}_\succ = [\mathfrak{b}_\succ, \mathfrak{b}_\succ] = \{ L \in \mathfrak{b}_\succ \mid L_{ii} = 0 \}.$$

Пусть также $\mathfrak{q}_\succ$ – класс смежности

$$\mathfrak{q}_\succ = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \mathfrak{n}_\succ \subset \mathfrak{b}_\succ.$$

Простое вычисление показывает, что для любого отношения порядка $\succ$ множество $\mathfrak{q}_\succ$ лежит в S_C. Более того, можно показать, что $\mathfrak{q}_\succ$ – неприводимая компонента S_C, соответствующая одной из вершин пермутоэдра (заметим, что число отношений порядка на множестве из n элементов равно $n!$, то есть совпадает с числом вершин пермутоэдра).

Интересно также отметить, что решения уравнений $(\star)$, лежащие в компонентах вида $\mathfrak{q}_\succ$, являются целыми функциями времени, а именно – полиномами от экспонент, см. работу М.В. Мещерякова [10]. Решения же, соответствующие внутренним точкам пермутоэдра, являются, вообще говоря, рациональными функциями от экспонент (то, что решения являются элементарными функциями, следует просто из того, что геометрический род кривой C равен нулю).

Список литературы

[1] A.G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky. Reduction of hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. *Inventiones mathematicae*, 54(1):81–100, 1979.

[2] A.G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky. Reduction of hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II. *Inventiones mathematicae*, 63(3):423–432, 1981.

[3] P. Van Moerbeke and D. Mumford. The spectrum of difference operators and algebraic curves. *Acta Mathematica*, 143(1):93–154, 1979.

[4] M. Adler and P. Van Moerbeke. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves. *Advances in mathematics*, 38(3):267–317, 1980.

[5] T. Ratiu and P. Van Moerbeke. The Lagrange rigid body motion. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 32, pages 211–234. Institut Fourier, 1982.

[6] M. Adler and P. van Moerbeke. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. *Advances in Mathematics*, 38(3):318–379, 1980.

[7] L. Gavrilov. Generalized jacobians of spectral curves and completely integrable systems. *Math. Zeitschrift*, 230:487–508, 1999.

[8] A Izosimov. Singularities of integrable systems and nodal curves. *arXiv:1408.4844*, 2014.

[9] A.S. Mishchenko and A.T. Fomenko. Euler equations on finite-dimensional Lie groups. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 12(2):371–389, 1978.

[10] M.V. Meshcheryakov. The integration of the equations for geodesics of left-invariant metrics on simple Lie groups using special functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 45(4):473, 1983.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

2.1 Опубликованные и принятые в печать работы

1. Bolsinov A and Izosimov A, *Singularities of bi-Hamiltonian systems*, Communications in Mathematical Physics, 331 (2014), pp 507–543.
2. Izosimov A, *Stability of relative equilibria of multidimensional rigid body*, Nonlinearity, 27 (2014), p. 1419.
3. Izosimov A, *The derived algebra of a stabilizer, families of coadjoint orbits, and sheets*, Journal of Lie Theory, 24 (2014), pp 705–714.
4. Izosimov A, *Algebraic geometry and stability for integrable systems*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 291 (2015), pp 74–82 (на данный момент опубликовано в online версии).

2.2 Препринты

5. Izosimov A, *Singularities of integrable systems and nodal curves*, arXiv:1408.4844.
6. Izosimov A, *Generalized argument shift method and complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras*, arXiv:1406.3777.

3 Доклады на семинарах

1. Working Group in Hamiltonian Systems, University of Toronto, доклад «Bi-Hamiltonian structures and stability of motion».
2. Working Group in Hamiltonian Systems, University of Toronto, доклад «Singular fibers of integrable systems, reducible curves, and convex polytopes».
3. Современные геометрические методы, Мехмат МГУ, доклад «Локальная геометрия бигамильтоновых структур».
4. Семинар по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина), Мехмат МГУ, доклад «Динамика многомерного твердого тела и алгебраические кривые».

4 Педагогическая деятельность

4.1 Преподавание

В весеннем семестре 2014 года я вел семинары по курсам «Классическая дифференциальная геометрия», «Наглядная геометрия и топология» на механико-математическом факультете МГУ, лекции и семинары по курсу «Дополнительные главы алгебры и анализа: продолжение» на факультете прикладной политологии ВШЭ, а также семинары по курсу «Линейная алгебра» в совместном бакалавриате ВШЭ-РЭШ. Кроме того, я руководил студенческим семинаром «Алгебраическая геометрия и интегрируемые системы» и соруководил семинаром «Современные геометрические методы» на механико-математическом факультете МГУ.

4.2 Научное руководство

1. Константин Алешкин, студент 5ого курса Мехмата МГУ, соруководство.
2. Екатерина Голова, студентка 4ого курса Мехмата МГУ.

5 Экспертная деятельность

В этом году я писал рецензии для журнала Journal of Geometry and Physics.