Отчет по гранту фонда “Династия” за 2014 год.
Ф.Н. Пахомов.

Результаты, полученные в этом году. Здесь я опишу результаты, полученные в [4]. Рассматривались модальные алгебры, соответствующие вариантам полимодальной логики доказуемости Джапаридзе **GLP**. Классически логика доказуемости **GLP** рассматривается, как логика в модальном языке с модальностями занумерованными натуральными числами. Мной, вслед за [3], рассматривалось обобщения $\mathbf{GLP}_\alpha$ этой логики, в которых α является линейно-упорядоченным множеством, служащим множеств индексов модальностей. Для любой (поли)модальной логики может быть рассмотрено многообразие (поли)модальных алгебр аксиоматизируемое тождествами, полученными путем перевода аксиом логики на язык модальных алгебр. Мной были рассмотрены многообразия алгебр, соответствующие логикам $\mathbf{GLP}_\alpha$. Основной результат состоит в том, что элементарная теория свободной $\mathbf{GLP}_n$-алгебры, порождённой пустым множеством порождающих разрешима при любом n.

Было введено понятие линейной **GLP**-алгебры, которое обобщает свойства характерные для свободных **GLP**-алгебр с пустым множеством порождающих. Были рассмотрены свободные расширения **GLP**-алгебр новыми модальными операторами, с индексами меньшими всех уже имеющихся в алгебре операторов. Было установлено, посредством обобщения техники из [1], что такие расширения линейных алгебр остаются линейными. Тем самым, используя линейность свободной алгебры Магари с пустым множеством порождающих (может пониматься, как свободная $\mathbf{GLP}_1$-алгебра с пустым множеством порождающих), было установлено что все свободные **GLP**-алгебры линейны. Кроме того, была введена операция линейного произведения **GLP**-алгебр $\otimes^L$ также сохраняющая линейность алгебр. Рассматривались факторы **GLP**-алгебр по отношениям эквивалентности вида

$$x \sim y \iff x \wedge \tau_0(c) = y \wedge \tau_0(c), \text{ где } \tau_0 \text{ минимальный модальный оператор, а } c \text{ отлична от единицы.}$$

Изучались некоторые разложения свободных расширений линейных **GLP**-алгебр одной модальностью снизу. Такая алгебра, с точностью до изоморфизма, совпадает с линейным произведением некоторых своих факторов и самой себя

$$\mathbf{E} \simeq \mathbf{F}_1 \otimes^L \dots \mathbf{F}_k \otimes^L \mathbf{E}.$$

Такие разложения позволяют описать каждый элемент искомого свободного расширения через набор элементов исходной алгебры в рамках подходящего разложения.

Основной результат выводится из того, что операция свободного расширения одной модальностью снизу сохраняет разрешимость элементарных теорий линейных **GLP**-алгебр. Для установления разрешимости такого свободного расширения, было построено сведение элементарных теорий линейных произведений к элементарным теориям сомножителей, а также сведение элементарных теорий факторов, указанного выше вида, к элементарным теориям факторизуемых алгебр. С использованием указанных выше разложений и сведений было построено сведение элементарной теории свободного расширения одной модальностью снизу к элементарной теории исходной алгебры.

Этот результат обобщил результат С.Н. Артёмова и Л.Д. Беклемишева об разрешимости элементарной теории свободной, порождённой пустым множеством порождающих алгебры Магари. Кроме того, этот результат является существенным продвижением в решение [2, Проблема 33] о разрешимости элементарной свободной $\mathbf{GLP}_\omega$ алгебры, порождённой пустым множеством порождающих.

Опубликованные и поданные в печать работы.

1. F. Pakhomov. On Elementary Theories of GLP-Algebras. *ArXiv e-prints*, pages 1–39, 2014.

Участие в конференциях и школах.

- Logic Colloquium 2014 (July 14–19, 2014, Vienna, Austria).
- Proof Theory, Modal Logic, and Reflection Principles Second International Wormshop (September 29–October 2, 2014, Mexico City, Mexico)

Педагогическая деятельность. Преподаю на Малом Мехмате в кружках для 6-ых классов.

Список литературы

[1] L.D. Beklemishev. Veblen hierarchy in the context of provability algebras. In D. Westerståh P. Hájek, L. Valdés-Villanueva, editor, *Proceedings of the Twelfth International Congress*, Logic, Methodology and Philosophy of Science, pages 65–78. Kings College Publications, 2005.

[2] L.D. Beklemishev and A. Visser. Problems in the logic of provability. In Dov M. Gabbay, Sergei S. Goncharov, and Michael Zakharyaschev, editors, *Mathematical Problems from Applied Logic I*, volume 4 of *International Mathematical Series*, pages 77–136. Springer New York, 2006.

[3] Lev D. Beklemishev, David Fernández-Duque, and Joost J. Joosten. On provability logics with linearly ordered modalities. *Studia Logica*, 102(3):541–566, 2014.

[4] F. Pakhomov. On Elementary Theories of GLP-Algebras. *ArXiv e-prints*, pages 1–39, 2014.