Отчёт по гранту фонда “Династия” за 2013 год.
Ф.Н. Пахомов.

Результаты, полученные в этом году.

1. Здесь я опишу результаты, полученные в препринте [4]. В [4] изучался вопрос об алгоритмической сложности задач распознавания доказуемости в некоторых фрагментах логики доказуемости Джапаридзе **GLP**. Логика **GLP** - это логика язык которой расширяет язык исчисления высказываний $\wedge, \vee, \to, \neg, \top, \bot, x_0, x_1, \ldots$ ($\top$ — это константа для истины, а $\bot$ — это константа для лжи) унарными связками “бокс” $[i]$, где i пробегает все натуральные числа. Логика **GLP** является аксиоматизацией поведения формализованных доказуемостей для некоторых случаев цепочки теорий с возрастающей силой; $[i]$ соответствует доказуемости в i-ой по силе теории. Она обычно заданётся, как исчисление в гильбертовском стиле; мы не будем приводить его здесь. В последние годы логика **GLP** была предметом активного изучения. В частности, было установлено, что алгоритмическая сложность задачи проверки на выводимость в **GLP** для формул общего вида является PSPACE-полной (И.Б. Шапировский [5]), а для, так называемых, сильно позитивных формул является разрешимой за полиномиальное время (Е.В. Дашков [2]).

В [4] я получил два результата. Было показано, что задача проверки на выводимость в логике **GLP** для формул без свободных переменных является PSPACE-полной. Кроме того, было доказано, что при всяком натуральном n за полиномиальное время разрешима задача проверки на выводимость в логике **GLP** для формул без свободных переменных и не более, чем с n различными $[i]$.

2. Здесь я опишу результаты, полученные в препринте [3]. Рассматривалась конструктивная система ординальных обозначений до ординала $\varepsilon_0 = \lim\limits_{n\to\omega} \underbrace{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n \text{ раз}}$ на основе логики **GLP**. Эта система была предложена и использована для вычисления характерного ординала арифметики Пеано **PA** с помощью принципов рефлексии (Л.Д. Беклемишев [1]). Мной изучался вопрос о разрешимости элементарной теории этой системы и кроме того ряд родственных вопросов. Рассматривается множество $\boldsymbol{W}_\omega$ формул, составленных из всевозможных $\langle n\rangle$ и $\top$; здесь $\langle n\rangle\varphi$ — это сокращение для $\neg[n]\neg\varphi$. На нём имеются отношение эквивалентности $\sim$

$$\varphi \sim \psi \overset{\text{def}}{\iff} \mathbf{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

и бинарное отношение $<_0$

$$\varphi <_0 \psi \overset{\text{def}}{\iff} \mathbf{GLP} \vdash \psi \to \langle 0\rangle\varphi.$$

Кроме того, мы обозначаем $\langle n\rangle$ функцию $\boldsymbol{W}_\omega \to \boldsymbol{W}_\omega$, приписывающую соответствующий ромб к формуле слева. Структура $(\boldsymbol{W}_\omega/{\sim}, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots)$ составляет конструктивную систему ординальных обозначений до ε_0 — $<_0$ является вполне-упорядочиванием с порядковым типом ε_0, каждый элемент структуры представляется термом и $\sim, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots$ рекурсивны на $\boldsymbol{W}_\omega$. Я доказал, что элементарная теория этой структуры неразрешима.

Кроме того, имеются множества $\boldsymbol{W}_n$ всех формул из $\boldsymbol{W}_\omega$, в которых нет $\langle n+1\rangle, \langle n+2\rangle, \ldots$. Соответствующие структуры $(\boldsymbol{W}_n/\sim, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle)$ составляют конструктивные системы ординальных обозначений до ординалов $\underbrace{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n+1 \text{ раз}}$. Я доказал, что для структур $(\boldsymbol{W}_n/\sim, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle)$ элементарная теория неразрешима при $n \geq 3$ и разрешима при $n \leq 2$.

Перечислю ещё некоторые результаты [3]:

1. неразрешимы элементарные теории структур $(\boldsymbol{W}_\alpha/\sim, <_0, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ для всех $\alpha \in [3, \omega]$;

2. разрешимы элементарные теории структур $(\boldsymbol{W}_\alpha/\sim, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ для всех $\alpha \in [2, \omega]$;

3. структуры $(\boldsymbol{W}_\alpha/\sim, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle)$ попарно элементарно эквивалентны для $\alpha \in [3, \omega]$.

Опубликованные и поданные в печать работы.

1. F. Pakhomov. On the complexity of the closed fragment of Japaridze's provability logic. *ArXiv e-prints*, pages 1–12, May 2013. Статья подана в журнал "Archive for Mathematical Logic".

2. F. Pakhomov. On Elementary Theories of Ordinal Notation Systems based on Reflection Principles. *ArXiv e-prints*, pages 1–23, December 2013.

Участие в конференциях и школах.

- Logic Colloquium 2013 (July 22-27, 2013, Évora, Portugal).

Педагогическая деятельность. Преподаю на Малом Мехмате в кружках для 5-ых классов. Помогал в обучение студентов 1 курса факультета математики ВШЭ в рамках курса "Логика и алгоритмы".

Список литературы

[1] Lev D. Beklemishev. Proof-theoretic analysis by iterated reflection. *Arch. Math. Log.*, 42(6):515–552, 2003.

[2] E. Dashkov. On the positive fragment of the polymodal provability logic GLP. *Mathematical Notes*, 91:318–333, 2012.

[3] F. Pakhomov. On Elementary Theories of Ordinal Notation Systems based on Reflection Principles. *ArXiv e-prints*, pages 1–23, December 2013.

[4] F. Pakhomov. On the complexity of the closed fragment of Japaridze's provability logic. *ArXiv e-prints*, pages 1–12, May 2013.

[5] Ilya Shapirovsky. PSPACE-decidability of Japaridze's polymodal logic. In *Advances in Modal Logic*, pages 289–304, 2008.