Отчет
по программе фонда «Династия»
за 2014 год

Подольский Владимир

Результаты, полученные в 2014 году

В области мин-плюс алгебры было завершено исследование вопроса об аналоге теоремы Гильберта о нулях. Мин-плюс полукольцом называется множество рациональных чисел с операциями взятия минимума, играющей роль мин-плюс сложения, и обычного сложения, играющего роль мин-плюс умножения. Также рассматривается вариант мин-плюс полукольца, в которое добавлен элемент $+\infty$. Этот элемент играет роль нуля по сложению. Понятие монома в этом полукольце определяется по аналогии с обычными мономами. Многочленам называется мин-плюс сумма (то есть, минимум) различных мономов. В мин-плюс алгебре рассматриваются два варианта определения полиномиального уравнения. В первом варианте уравнения имеют вид $p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$, где p и q – мин-плюс многочлены. Такие уравнения обычно называются мин-плюс уравнениями. Во втором варианте уравнение задается лишь одним многочленом $p(x_1, \ldots, x_n)$ и при этом точка $a \in \mathbb{Q}^n$ называется корнем такого уравнения, если минимум значения мономов многочлена достигается на как минимум двух мономах. Другими словами, корни такого уравнения – это точки негладкости функции, задаваемой многочленом. Такие уравнения обычно называются тропическими уравнениями.

Для классических многочленов одним из основополагающих результатов в алгебре является теорема Гильберта о нулях. Слабая форма этой теоремы дает конструктивное условие неразрешимости системы многочленов, а именно, система многочленов (над алгебраически замкнутым полем) неразрешима, если есть алгебраическая комбинация многочленов системы, тождественно равная 1. Что касается аналога теоремы Гильберта о нулях в мин-плюс алгебре, нетрудно показать, что наивная переформулировка этой теоремы в мин-плюс алгебре оказывается неверной для обоих вариантов определения уравнений. Грубо говоря, причина этого состоит в том, что в мин-плюс алгебре нет вычитания – в алгебраической комбинации ничего не может сократиться. Ранее Григорьевым был сформулирован в виде гипотезы и доказан для случая многочленов одной переменной аналог теоремы Гильберта о нулях в двойственной форме для случая тропических уравнений. В прошлом году удалось доказать эту гипотезу, а также найти тропический аналог теоремы Гильберта о нулях в стандартной (то есть, не двойственной) форме.

В этом году к результатам прошлого года удалось добавить эффективность теоремы. Для классической теоремы Гильберта известна верхняя оценка степени многочленов, необходимых для построения алгебраической комбинации, тождественно равной нулю. Этот результат называется эффективной теоремой Гильберта о нулях. Если число переменных обозначить через n, число многочленов в системе – через k, а максимальную степень многочленов в системе – через

d, то верхняя оценка в эффективной теореме о нулях составляет $2d^{\min(k,n)}$.

В случае мин-плюс алгебры эффективный аналог теоремы Гильберта о нулях также оказывается верен. Интересно и неожиданно, однако, что верхняя оценка степени многочленов в получающейся алгебраической комбинации существенно зависит от присутствия элемента $+\infty$ в полукольце. Для полукольца без бесконечности получена верхняя оценка $(n+2)kd$, тогда как для полукольца с бесконечностью получена верхняя оценка $\mathrm{poly}(n,k)(2d)^{\min(n,k)}$, где $\mathrm{poly}(n,k)$ – некоторый полином от n и k. Причем различие в верхних оценках по существу: в обоих случаях построены примеры систем многочленов, доказывающие точность полученных верхних оценок. Это различие случаев полукольца с бесконечностью и без нее стало основной причиной того, что работа над этим результатом заняла больше времени, чем ожидалось – случай полукольца с бесконечностью потребовал значительной дополнительной технической работы.

Все варианты мин-плюс теоремы Гильберта о нулях доказаны как для тропических уравнений, так и для мин-плюс уравнений. Также, мы устанавливаем связь между мин-плюс и тропическими системами уравнений. Наши результаты и их доказательства показывают, что мин-плюс и тропические системы уравнений лучше исследовать параллельно. Некоторые рассуждения проще проводить для мин-плюс уравнений, а другие – для тропических уравнений. При этом обычно результаты можно переносить между мин-плюс и тропическими уравнениями, пользуясь установленной связью.

Краткая версия работы с результатами о мин-плюс аналоге теоремы Гильберта о нулях принята на конференцию STACS 2015 [5], а полная версия опубликована в виде препринта [4].

В области первопорядкового переписывания запросов к онтологическим базам данных было продолжено исследование длины таких переписываний. Ранее было показано, что вопрос о длине переписывания (для различных видов переписываний) связан с вопросами сложности вычисления булевых функций булевыми схемами (соответственно, для различных видов булевых схем). Из этого были выведены нижние оценки длины переписывания для различных видов переписываний. Также ранее исследовался вопрос о длине переписываний для случая теорий маленькой глубины. Были получены различные верхние и нижние оценки для теория постоянной глубины и произвольных запросов. Кроме того, ранее было доказано, что для древовидных запросов и теорий глубины 1 есть полиномиальное переписывание всех рассматриваемых типов. В этом году исследовался вопрос о первопорядковых переписываниях древовидных запросов в теориях глубины больше 1. Доказано, что для теорий постоянной глубины и древовидных запросов кратчайшие позитивные экзистенциальные переписывания бывают сверхполиномиальной длины (от длины запроса), тогда как нерекурсивные "Даталог" переписывания полиномиальны. При этом для частного случая линейных запросов этот результат обобщается на произвольные теории без ограничения на глубину. Для произвольных древовидных запросов это не верно: ранее было показано, что без ограничений на глубину теории в этом случае кратчайшие нерекурсивные "Даталог" переписывания могут быть экспоненциальны. Для доказательства результатов о длине переписываний требуется исследование взаимосвязи переписываний запросов со сложностью булевых функций в различных моделях вычислений. Ранее для этой цели была введена вычислительная модель гиперграфовых программ и исследована ее сложность в случае гиперграфов степени не выше 2 и не выше 3. Для результатов этого года потребовалось исследовать интервальные и древовидные варианты гиперграфовых программ и установить их вычислительную силу в терминах более стандартных моделей вычислений. Оказалось, что интервальные гиперграфовые программы эквивалентны недетерминированным ветвящимся программам, а древовидные гиперграфовые программы эквивалентны SAC^1 булевым схемам (полной задачей для этого класса схем является, например, задача проверки принадлежности данного слова данной контекстно-свободной грамматике). Краткая версия работы с описанными результатами была представлена на конференции DL 2014 [1], а полная версия опубликована в виде препринта [2].

Опубликованные и поданные в печать работы

[1] M. Bienvenu, S. Kikot, and V. V. Podolskii. Succinctness of query rewriting in OWL 2 QL: the case of tree-like queries. In *Informal Proceedings of the 27th International Workshop on Description Logics, Vienna, Austria, July 17-20, 2014.*, pages 45–57, 2014.

[2] M. Bienvenu, S. Kikot, and V. V. Podolskii. Succinctness of query rewriting in OWL 2 QL: the case of tree-like queries. *CoRR*, abs/1406.3047, 2014.

[3] G. Gottlob, S. Kikot, R. Kontchakov, V. V. Podolskii, T. Schwentick, and M. Zakharyaschev. The price of query rewriting in ontology-based data access. *Artif. Intell.*, 213:42–59, 2014.

[4] D. Grigoriev and V. V. Podolskii. Tropical effective primary and dual nullstellensätze. *CoRR*, abs/1409.6215, 2014.

[5] D. Grigoriev and V. V. Podolskii. Tropical effective primary and dual nullstellensätze. In *The 32nd Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science 2015*, 2015. To appear.

[6] S. Kikot, R. Kontchakov, V. V. Podolskii, and M. Zakharyaschev. On the succinctness of query rewriting over shallow ontologies. In *Joint Meeting of the Twenty-Third EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the Twenty-Ninth Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS), CSL-LICS '14, Vienna, Austria, July 14 - 18, 2014*, page 57, 2014.

Участие в конференциях и школах

1. The 9th International Computer Science Symposium in Russia, 7-11 июня 2014, участие в качестве члена организационного комитета.

2. Logic in Computer Science, 14 - 18 июля 2014, 1 доклад.

3. 27th International Workshop on Description Logics, 17 - 20 июля, 1 доклад.

Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

1. ВШЭ, факультет компьютерных наук. Курс “Дискретная математика”, лекции и семинары. Осень 2014 года.

2. Школа №54, Москва. Уроки алгебры в матклассе, весенний семестр.

3. Программа Math in Moscow. Курс “Computability and Complexity”, весь 2014 года.

4. Курс из 10 лекций “Сложность булевых функций” в рамках Computer Science Club и Computer Science Center, Санкт-Петербург. Осень 2014 года.

5. МГУ. Просеминар по математической логике и информатике для младшекурсников, весь 2014 год.