ОТЧЕТ

Пржиялковского Виктора Владимировича
по программе Фонда “Династия”

1. Результаты, полученные в 2014 году

Основным предметом изучения в 2014 году были полные пересечения в грассманианах, а также трехмерные многообразия Фано. В частности, изучался вопрос построения их моделей Ландау–Гинзбурга и изучения их свойств.

1.1. **Полные пересечения в грассманианах плоскостей.** Напомним, что большинство гладких трехмерных многообразий Фано описываются как полные пересечения в гладких торических многообразиях, а остальные — либо как полные пересечения в однородных пространствах (преимущественно грассманианах плоскостей), или (единственное многообразие, V_{22}) как многообразие, допускающее хорошее торическое вырождение (а именно, к многообразию, имеющему лишь обыкновенные двойные точки в качестве особенностей). (Очень слабые) модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано, соответствующие антиканонической симплектической форме, были построены мною (для многообразий основной серии, [Prz13]) и Коутсом, Корти, Галкиным, Голышевым и Каспрчиком (см. [CCGGK12]). А именно, были найдены (и, в случае многообразий основной серии, изучены) многочлены Лорана, такие что соответствующие им периоды совпадают с I-рядами, то есть производящими рядами одноточечных инвариантов Громова–Виттена многообразий Фано. Однако хотелось бы получить такие модели более систематическим образом, в частности, позволяющим строить модели Ландау–Гинзбурга, соответствующие не только антиканонической, но и любой симплектической форме. Для полных пересечений в гладких торических многообразиях это можно сделать с помощью известного метода Гивенталя.

А именно, около двадцати лет назад Гивенталь предъявил конструкцию (при некоторых условиях) для таких моделей Ландау–Гинзбурга, использующую комбинаторику торического многообразия и полного пересечения в нем. По ним он построил интеграл Гивенталя и показал, что он равен свободному члену I-ряда полного пересечения. Оказывается, что, по крайней мере для трехмерных многообразий Фано эти модели сводятся к очень слабым моделям Ландау–Гинзбурга, то есть к многочленам Лорана, а интеграл равен ряду свободных членов этого многочлена. Более того, аналог моделей и интегралов Гивенталя можно построить и для полных пересечений в некоторых неторических многообразиях, таких как многие однородные пространства. А именно, если такие многообразия имеют вырождения к (особым) торическим многообразиям, имеющим малое разрешение, то аналогом конструкции Гивенталя является некоторая специализация конструкции для полного пересечения в малом разрешении.

Для полных пересечений в грассманианах (или, более общо, в многообразиях частичных флагов) такое обобщение было построено и изучено Батыревым, Чиокан-Фонтанином, Кимом и ван Стратеном в [BCFKS97] и [BCFKS98]. В этих же работах совпадение интегралов Гивенталя с I-рядами было выдвинуто в качестве гипотезы, доказанной впоследствии в [BCK03] для грассманианов плоскостей и в [MR13] для всех грассманианов. Однако вопрос, сводятся ли модели и интегралы Гивенталя для них к многочленам Лорана, оставался неясным. Положительный ответ, для полных пересечений в грассманианах плоскостей, был дан в этом году Шрамовым и мною.

Опишем упомянутые выше конструкции более подробно. Рассмотрим полное пересечение $Y = X \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_l$ в гладком торическом многообразии X с числом Пикара $\rho(X) = \rho$. Пусть переменные u_i, $1 \le i \le N$, соответствуют лучам веера X. Выберем nef-разбиение $E_0, \ldots, E_l \subset \{1, \ldots, N\}$, соответствующее Y. Пусть R_i — порождающие группы соотношений на лучи веера X, интерпретируемые как мономы от переменных u_i. Зафиксируем параметры q_i, соответствующие симплектической форме на Y. Тогда *модель Ландау–Гинзбурга Гивенталя* — это многообразие

$$\{R_i = q_i,\ \sum_{s \in E_i} u_s = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant \rho,\ 1 \leqslant s \leqslant l\}$$

с суперпотенциалом $\sum_{s \in E_0} u_s$. *Интеграл Гивенталя* для Y — это интеграл

$$I_Y = \int\limits_{|u_i| = \varepsilon_i} \frac{1}{(2\pi i)^N} \frac{du_1}{u_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_N}{x_N} \frac{1}{\prod_{r=1}^{\rho} (R_r - q_r) \cdot \prod_{s=0}^{l} \left(1 - \sum_{v \in E_s} u_v\right)}$$

для некоторых положительных чисел ε_i. Зафиксируем параметры q_i, соответствующие антиканонической форме на Y.

Аналогичным образом Батыревым, Чиокан-Фонтанином, Кимом и ван Стратеном была описана модель Ландау–Гинзбурга для полного пересечения в грассманиане. Для грассманиана плоскостей она выглядит следующим образом. Пусть многообразие $Y = G(2, k+2) \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_l$, $\deg Y_i = d_i$, является полным пересечением Фано. Определим следующие многочлены Лорана на $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[a_{1,1}^{\pm 1}, \ldots, a_{k,1}^{\pm 1}, a_{1,2}^{\pm 1}, \ldots, a_{k,2}^{\pm 1}]$:

$$F_0 = a_{1,1},\ F_i = \frac{a_{i+1,1}}{a_i, 1} + \frac{a_{i+1,2}}{a_{i,k}}, 1 \le i \le k-1,\ F_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{j,2}}{a_{j,1}},\ F_{k+1} = \frac{1}{a_{k,2}}.$$

Определим многочлены Лорана E_s, $1 \le s \le l$, как суммы d_s последовательных многочленов F_i, а E_0 как сумму всех незадействованных многочленов F_i. Тогда *стандартная модель Ландау–Гинзбурга* для Y — это многообразие $\{E_i = 1, 1 \le i \le l\} \subset T$ с суперпотенциалом E_0.

Совместно с К. Шрамовым мы доказали следующую теорему.

Теорема ([PSh14]). *Стандартная модель Ландау–Гинзбурга для гладкого полного пересечения Фано Y в грассманиане плоскостей бирациональна тору. В частности, суперпотенциал задается многочленом Лорана f_Y.*

А именно, нами был построен конкретный алгоритм, на каждом шаге которого одна из координатных переменных бирационально выражается из очередного уравнения E_i, задающего модель Ландау–Гинзбурга так, что суперпотенциал остается многочленом Лорана. Ожидается, что этот алгоритм почти буквально можно обобщить на случай полных пересечений в произвольных грассманианах.

Пусть f — многочлен Лорана от m переменных $x_1, \ldots, x_m$. Интеграл

$$I_f(t) = \int\limits_{|x_i| = \varepsilon_i} \frac{1}{(2\pi i)^m} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_m}{x_m} \frac{1}{1 - tf} \in \mathbb{C}[[t]]$$

называется *главным периодом* для f, где ε_i — произвольные положительные числа. Его можно вычислить следующим образом: если ϕ_j — постоянный член многочлена f^j, то $I_f(t) = \sum \phi_j t^j$. Это определение оправдывается следующим утверждением.

Пусть P — дифференциальный оператор Пикара–Фукса для пучка гиперповерхностей в торе, заданного многочленом f. Тогда $P[I_f(t)] = 0$.

Оказывается, описанные в предыдущей теореме бирациональные преобразования сохраняют интеграл Гивенталя.

Предложение ([PSh14]). *Имеется равенство $I_Y = I_{f_Y}$.*

С каждым многообразием Фано V можно связать *регуляризованный постоянный член I-ряда* $\widetilde{I}_0^V = 1+a_1t+a_2t^2+\ldots$. Из работ Батырева–Чиокан-Фонтанина–Кима–ван Стратена и Марш–Ритш следует равенство $\widetilde{I}_0^Y = I_Y$. Многочлен Лорана f_Y называется *очень слабой моделью ЛГ* для Y, если $I_{f_Y} = \widetilde{I}_0^Y$.

Как итог, нами доказано следующее утверждение.

Следствие ([PSh14]). *У всякого гладкого полного пересечения Фано в грассманиане плоскостей есть очень слабая модель Ландау–Гинзбурга.*

1.2. **Трехмерные многообразия Фано.** В этом году были продолжены и, в основном, завершены проекты изучения моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано с точки зрения их пространств модулей и их вырождений. Напомним, что слоями моделей Ландау–Гинзбурга для многообразий Фано являются многообразия Калаби–Яу, зеркально двойственные антиканоническим сечениям многообразий Фано. В частности, в трехмерном случае такие сечения являются зеркально двойственными К3 поверхностями. Зеркальная двойственность для К3 поверхностей описана Долгачевым и Никулиным. Она утверждает что, грубо говоря, зеркально двойственными семействами К3 поверхностей являются такие семейства, что решетка алгебраических циклов для поверхностей из одного семейства совпадает с решеткой трансцендентных циклов другого, и наоборот. Антиканоническими сечениями гладких трехмерных многообразий Фано являются К3 поверхности с малым рангом Пикара. Соответственно, зеркально двойственные им К3 поверхности имеют большой ранг Пикара и, значит, малое пространство модулей. Так, для многообразий Фано основной серии общее антиканоническое сечение имеет ранг Пикара 1, а, значит, существует лишь одномерное семейство слоев двойственных моделей Ландау–Гинзбурга. Такие модели были конструктивно построены и изучены в моих и соавторов работах. Используя технику Гивенталя построения моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в гладких торических многообразиях, мною совместно с Дораном, Илтеном, Льюисом, Кацарковым и Хардером были построены торические модели Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано, соответствующие произвольной симплектической форме, и изучены их модулярные свойства и их монодромии. В частности, пространства модулей возможных слоев моделей Ландау–Гинзбурга для любого трехмерного многообразия Фано покрывается семейством (на единицу меньшей размерности) одномерных семейств — моделей Ландау–Гинзбурга.

С другой стороны, вырождениям моделей Ландау–Гинзбурга соответствуют бирациональные перестройки или расслоения Мори многообразий Фано. Ярким примером такого подхода является теория базовых линков. Конструкции и гипотезы, вытекающие из такой точки зрения, изучались мною совместно с Илтеном, Каспрчиком, Кацарковым и Саковичем.

По обоим исследованиям в следующем году ожидается опубликовать препринты.

Список литературы

[BCFKS97] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians*, Nucl. Phys., B 514, No.3, 640–666 (1998), arXiv:alg-geom/9710022.

[BCFKS98] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39, arXiv:math.AG/9803108.

[BCK03] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1, 101–136 (2005).

[CCGGK12] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk, *Mirror Symmetry and Fano Manifolds*, European Congress of Mathematics (Krakow, 2–7 July, 2012), November 2013, pp. 285–300, arXiv:1212.1722.

[MR13] R. Marsh, K. Rietsch, *The B-model connection and mirror symmetry for Grassmannians*, arXiv:1307.1085.

[Prz13] V. Przyjalkowski. *Weak Landau–Ginzburg models for smooth Fano threefolds*, Izv. Math. Vol., 77 No. 4 (2013), 135–160, arXiv:0902.4668.

[PSh14] V. Przyjalkowski, C. Shramov, "Laurent phenomenon for Landau–Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes", arXiv:1409.3729.

2. Список работ

- A. Iliev, L. Karzarkov, V. Przyjalkowski, "Double solids, categories and non-rationality", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2014) 57, 145-173, arXiv:1102.2130. (Была как принятая к печати в отчете за 2013 год.)
- V. Przyjalkowski, C. Shramov, "Laurent phenomenon for Landau–Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes", arXiv:1409.3729.

3. Участие в научных конференциях

Я участвовал, в частности, в следующих конференциях:

- Conference on Homological Mirror Symmetry, Майами, США, 27 января — 1 февраля.
- Однодневная конференция, посвященная 50-летию Ю. Г. Прохорова, Москва, Россия, 4 апреля. Организатор, доклад "Торические модели Ландау–Гинзбурга и бирациональная геометрия".
- Landau-Ginzburg Theory and Fano Varieties, Генчжу, Корея, 26 мая — 30 мая. Доклад "Givental's Landau-Ginzburg models and Givental's integrals".
- Frontiers of rationality, Лонгийр (Шпицберген), Норвегия, 14 июля — 18 июля.
- Geometry and Physics of Gauged Linear Sigma Model and Its Related Topics, Сеул, Корея, 28 июля — 1 августа.
- "Геометрия алгебраических многообразий", посвященная памяти В. А. Исковских, МИАН, Россия, 23 декабря. Организатор.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Я активно сотрудничаю с Венским Университетом.

5. Педагогическая деятельность

Я являюсь соруководителем семинара Исковских (МИАН–МГУ). Также я являюсь организатором двух конференций: однодневная конференции, посвященная 50-летию

Ю. Г. Прохорова (МИАН, 4 апреля) и однодневной конференции “Геометрия алгебраических многообразий”, посвященной памяти В. А. Исковских (МИАН, 23 декабря). Кроме того, я прочел курс лекций по основам алгебраической геометрии (ИГУ, Иркутск, 1–10 марта).