ОТЧЕТ

Пржиялковского Виктора Владимировича
по программе Фонда "Династия"

1. Результаты, полученные в 2015 году

В 2015 году основными направлениями исследований было, во первых, продолжение изучения зеркальной симметрии, а, во-вторых, изучение вопроса рациональности двойных пространств с ветвлением в квартике.

1.1. **Торические модели Ландау–Гинзбурга.** Напомним, что одним из первых численных проявлений феномена зеркальной симметрии являлся следующий. Рассмотрим гладкое многообразие Калаби–Яу Y размерности n. Тогда для него существует зеркально двойственное многообразие Калаби–Яу $Y^\vee$ той же размерности, такое что $h^{p,q}(Y) = h^{n-p,q}(Y^\vee)$. Иными словами, ромбы Ходжа двойственных многообразий получаются друг из друга поворотом на 90° или, что то же самое, зеркальным отражением относительно диагонали; отсюда и сам термин "зеркальная симметрия". Примером такого соответствия является следующий результат Батырева–Борисова (см. [BB96]). Рассмотрим горенштейново торическое многообразие T и неф-разбиение на нем, то есть разбиение антиканонического дивизора

$$-K_T = D_1 + \ldots + D_N = D_{1,1} + \ldots + D_{1,i_1} + \ldots + D_{k,1} + \ldots + D_{k,i_k},$$

где каждая сумма граничных дивизоров $D_{j,1}+\ldots+D_{j,i_j}$ эквивалентна гладкой гиперповерхности Y_j. Рассмотрим полное пересечение $Y = T\cap Y_1 \ldots \cap Y_k$. Рассмотрим двойственное торическое многообразие $T^\vee$, двойственное неф-разбиение и двойственное полное пересечение Калаби–Яу $Y^\vee = T^\vee \cap Y_1^\vee \cap \ldots \cap T_k^\vee$. Положим $n = \dim Y = \dim Y^\vee$. тогда

$$h^{p,q}_{st}(Y) = h^{n-p,q}_{st}(Y^\vee),$$

где $h^{p,q}_{st}(\cdot)$ — струнные числа Ходжа, совпадающие с обычными в гладком случае.

Описанная выше конструкция моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в торических многообразиях принадлежит Гивенталю (см. [Gi98]). Если брать не все граничные дивизоры, а только часть, то такая конструкция приводит к двойственности между многообразиями Фано и моделями Ландау–Гинзбурга, то есть одномерными семействами многообразий Калаби–Яу. Однако до недавнего времени числа Ходжа для таких моделей были не определены. В конце 2014 года Кацарков, Концевич и Пантев дали определения трех наборов чисел $f^{p,q}(Y,f)$, $h^{p,q}(Y,f)$ и $i^{p,q}(Y,f)$ для семейств $f\colon Y \to \mathbb{C}$ с некоторыми (довольно слабыми) условиями. Они выдвинули гипотезы, гласящие, что, во-первых, $f^{p,q}(Y,f) = h^{p,q}(Y,f) = i^{p,q}(Y,f)$, а во-вторых, что если (Y,f) — модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X, $\dim X = \dim Y = n$, то $h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y,f)$.

Проверка этих гипотез для поверхностей дель Пеццо и была целью совместной работы с В. Лунцем. Напомним, что для поверхности дель Пеццо S_d степени d числа Ходжа задаются следующими равенствами: $h^{0,0}(S_d) = h^{2,2}(S_d) = 1$, $h^{1,1} = 10 - d$, $h^{p,q} = 0$ для $p \neq q$. Поверхности дель Пеццо были изначально определены как проективно нормальные поверхности степени d в $\mathbb{P}^d$, которые не являются конусами. (В частности, это исключает случаи $d = 1$ и $d = 2$, которые следует рассмотреть особо.) Такие поверхности естественно связаны между собой: если спроектировать поверхность степени d в $\mathbb{P}^d$ из точки на ней, мы получим (возможно особую) поверхность степени $d-1$ в $\mathbb{P}^{d-1}$. Таким образом, выбирая общие центры проекций, мы получим обычное описание поверхностей дель Пеццо как раздутий проективной плоскости. С другой стороны, воспользовавшись тем, что поверхность дель Пеццо наибольшей степени, то есть проективная плоскость, является торической, и выбирая торические центры проекций, можно построить торические вырождения поверхностей дель Пеццо. Рассмотрим веерный многоугольник Δ_d такого торического вырождения T_d поверхности дель Пеццо S_d. Это многоугольник с единственной строго внутренней целой точкой — центром координат — и с $12-d$ целыми точками на границе. Торические модели Ландау–Гинзбурга для S_d описываются как многочлены Лорана с носителями в Δ_d. (В частности, число параметров по модулю действия тора, от которых они зависят, равно $10-d$, то есть размерности пространства симплектических форм на S_d; координаты форм и являются параметрами многочлена Лорана.) Для проверки гипотез Кацаркова–Концевича–Пантева необходимо построить компактификации Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга. Такие компактификации были построены как раздутия компактификаций в двойственных торических поверхностях $T_d^\vee$, определяемых двойственным многоугольником $\Delta_d^\vee$. Это позволило получить детальное описание когомологий и относительных когомологий моделей Ландау–Гинзбурга и доказать гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева.

В заключение заметим, что гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева в многомерном случае гораздо более сложны. Однако в ряде случаев возможно доказать некоторые их следствия. А именно, для пучка многообразий Y (определенного с точностью до изоморфизма в коразмерности 1) определим число k_Y как разность числа компонент приводимых слоев (без кратностей) и числа самих приводимых слоев. Из гипотез следует, что если Y — модель Ландау–Гинзбурга многообразия Фано X, $\dim X = \dim Y = n$, то $k_Y = h^{1,n-1}(X)$. Совместно с Шрамовым в работе [PSh15] было доказано это следствие для моделей Ландау–Гинзбурга гивенталевского типа для полных пересечений.

1.2. **Двойные пространства с ветвлением в квартике.** Вторым вопросом, рассматривающимся в этом году, был вопрос рациональности трехмерных двойных пространств (то есть двойных накрытий проективного пространства) с ветвлением в квартике. Вопрос рациональности — один из центральных в бирациональной геометрии, и наиболее естественным и изученным нетривиальным случаем для него является случай трехмерных многообразий Фано. Рациональность или нерациональность гладких трехмерных многообразий Фано была установлена в $70-80$-х годах прошлого века, во многом Исковских и его школой. Поэтому следующим естественным вопросом стал вопрос рациональности многообразий, имеющих обыкновенные двойные точки. Идеологически он заключается в том, "сколько простейших условий на нерациональное многообразие надо поставить, чтобы оно стало рациональным". Одним из наиболее естественных многообразий для изучения этого вопроса и является двойное пространство с ветвлением в квартике.

Методом промежуточного якобиана нерациональность гладких двойных пространств была доказана Тихомировым и Вуазен. В случае одной особой точки нерациональность была установлена Бовилем, а в случае не более чем четырех точек, или в случае пяти общих точек — Дебаром. Другой подход к проблеме рациональности принадлежит Артину и Мамфорду. В своей знаменитой статье 1972 года они доказали нерациональность некоторых конкретных двойных пространств с 10 особыми точками, что привело к (одному из трех) решению проблемы Люрота. Прорыв в использовании их результата был достигнут Вуазен в статье [Vo15], опубликованной в этом году, в связи с ее новым подходом, использующим группы Чжоу и разложение диагонали. Используя этот подход она показала, что очень общее имеющее не более чем семь особых точек двойное пространство стабильно нерационально. Однако для конкретных особых многообразий вопрос рациональности оставался открытым. В работе [CPSh15] совместно с Чельцовым и Шрамовым была доказана нерациональность всех двойных пространств, имеющих не более, чем шесть особых точек. Идея доказательства следующая. Проектируя такое двойное пространство из особой точки, можно бирационально представить его как (возможно особое) расслоение на коники. Разрешив его особенности, его можно представить как гладкое расслоение на коники. К сожалению, обычно оно не является стандартным. Однако сделав определенные бирациональные перестройки, его можно бирационально представить как стандартное. Кривая ветвления исходного расслоения на коники имеет сильные ограничения на особенности; за этими ограничениями можно проследить и после бирациональных перестроек. Наконец, нерациональность гарантируется знаменитым результатом Шокурова (см. [Sh83]), утверждающим, что при некоторых условиях примиан кривой ветвления стандартного расслоения на коники, который является промежуточным якобианом этого расслоения, не является суммой якобианов кривых, а, значит, само расслоение не может быть рациональным. Можно проверить, что эти условия выполнены для рассматриваемого нами расслоения на коники.

Что известно про (не)рациональность двойных пространств с большим числом особых точек? Можно показать, что таких точек не больше 16. Прохоровым была доказана рациональность для случая 15 и 16 особых точек. Нами было показано, что за одним конкретным исключением не-$\mathbb{Q}$-факториальность влечет рациональность. Вместе с результатом Клеменса о том, что не-$\mathbb{Q}$-факториальность эквивалентна тому, что особое множество накладывает независимые линейные условия на квадрики, это дает то, что двойные пространства с по крайней мере одиннадцатью особыми точками нерациональны (так как пространство квадрик десятимерно). Эти результаты, наряду с некоторыми другими соображениями, позволяют выдвинуть гипотезу о том, что для двойных пространств с ветвлением в квартике $\mathbb{Q}$-факториальность эквивалентна нерациональности. Мы также показываем, что эта гипотеза следует из знаменитой гипотезы Шокурова о $|2K_S + \Delta|$.

Другим объектом исследования были двойные пространства с ветвлением в квартике, инвариантные относительно действия группы четных перестановок пяти элементов $\mathfrak{A}_5$. Эта группа, согласно Прохорову, является одной из немногих трехмерных простых неабелевых подгрупп в трехмерной группе Кремоны (группы бирациональных автоморфизмов трехмерного проективного пространства). В частности, известно три несопряженных вложения группы $\mathfrak{A}_5$ в трехмерную группу Кремоны. Имея действие группы на многообразие бирациональными изоморфизмами, можно разрешить неопределенности этого действия и, применив инвариантную программу минимальных моделей, получить действие группы на (в трехмерном случае) либо многообразии Фано ранга Пикара 1, либо расслоении на коники, либо расслоении на поверхности дель Пеццо. Выше мы описали связь особых двойных пространств с расслоениями на коники (стандартные расслоения являются минимальными в смысле программы минимальных моделей). Таким образом, кроме самостоятельного интереса, изучение инвариантных двойных пространств в случае их рациональности дает новые вложения группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны; и действительно, нами было построено такое вложение.

Действие группы $\mathfrak{A}_5$ на двойном пространстве продолжается до действия этой группы на $\mathbb{P}^3$, которое двойное пространство накрывает. Это позволяет выделить три представления группы $\mathfrak{A}_5$, два из которых приводят к рациональному двойному пространству, а третье приводит к двойным пространствам, разветвленных в квартиках Хашимото, то есть в квартиках вида

$$\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^2=\lambda\left(x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\right)$$

в $\mathbb{P}[x_1:x_2:x_3:x_4]$, где $x_0=-x_1-x_2-x_3-x_4$. Эти квартики особы при четырех значениях параметра λ. Число особых точек при этих значениях равно пяти, десяти (при двух значениях) и пятнадцати. (Не)рациональность в первом и последнем случае дается результатами, обсуждавшимися выше. Изучая кривые ветвления расслоений на коники, соответствующие оставшимся двум многообразиям, можно увидеть, что одно из них не стабильно рационально (так как кривая ветвления несвязна). Нерациональность оставшегося многообразия (предсказанную обсуждаемой выше гипотезой) установить пока не удается.

Наконец, последним результатом стало доказательство эквивариантной бирациональной супержесткости (то есть отсутствия бирациональных автоморфизмов, сохраняющих действие группы $\mathfrak{A}_5$) для всех $\mathfrak{A}_5$-инвариантных двойных пространств, за исключением одного, имеющего ровно пять особых точек. Этот результат и дает четвертое вложение группы $\mathfrak{A}_5$ в группу Кремоны трехмерного проективного пространства, не сопряженного трем остальным.

Изложенные выше результаты об $\mathfrak{A}_5$-инвариантных двойных пространствах опубликованы в работе [CPSh16].

2. Итоги программы

В программе было заявлено три направления. Вкратце, первое состояло в описании связи трехмерных многообразий Фано с помощью торических базовых линков; также была надежда связать эту конструкцию с зеркально двойственными моделями Ландау–Гинзбурга. Второе состояло в исследовании модулярных свойств моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано. Наконец, третье направление состояло в изучении инвариантов торических моделей Ландау–Гинзбурга, в частности тех, которые позволяют вычислить некоторые числа Ходжа многообразий Фано.

По всем трем направлениям за время поддержки фондом было сделано существенное продвижение. Задачи, поставленные в рамках первых двух направлений, были решены, а препринты (совместные с соавторами) готовятся к публикации. В рамках третьего направления было опубликовано несколько работ. Кроме того, обнаружилась более глубокая связь между числами Ходжа многообразий Фано и их двойственных моделей Ландау–Гинзбурга; изучение этой связи составляет содержание совместного с В. Лунцем исследования, являющегося естественным продолжением и обобщением направления, сформулированного в проекте.

Кроме того, в последний год возникло новое направление исследований — изучение бирациональных свойств, в частности рациональности, двойных пространств с ветвлением в квартике.

За период поддержки фондом было опубликовано девять работ, из них два поданных в журналы препринта, одна принятая статья, которая будет опубликована в начале 2016 года, и шесть опубликованных статей (часть статей была написана или подготовлена до начала поддержки фондом, но была опубликована после).

Список литературы

[BB96] V, V. Batyrev, L. A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. 126 (1996), no. 1, 183–203.

[CPSh15] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Which quartic double solids are rational?*, arXiv:1508.07277.

[CPSh16] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Quartic double solids with icosahedral symmetry*, European Journal of Mathematics, 2016 (to appear), arXiv:1508.07277.

[Gi98] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhдuser Boston, Boston, MA, 1998.

[KKP14] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, arXiv:1409.5996.

[PSh15] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models*, Int Math Res Notices (2015) Vol. 2015, 11302–11332, arXiv:1305.4377.

[Sh83] V. Shokurov, *Prym varieties: theory and applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 47 (1983), 785–855.

[Vo15] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle*, Invent. Math. 201 (2015), 207–237.

3. Список работ

- I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, ”Quartic double solids with icosahedral symmetry”, European Journal of Mathematics, 2016 (to appear), arXiv:1508.07282.
- I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, ”Which quartic double solids are rational?”, arXiv:1508.07277.
- В. Пржиялковский, К. Шрамов, “Феномен Лорана для моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений в грассманианах”, Тр. МИАН, 2015, 290, 102–113, arXiv:1503.05525.
- V Przyjalkowski, C. Shramov, ”Laurent phenomenon for Landau-Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes”, arXiv:1409.3729.
- V. Przyjalkowski, C. Shramov, “On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models Int Math Res Notices (2015) Vol. 2015, 11302–11332, arXiv:1305.4377.
- I. Cheltsov, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Birational geometry via moduli spaces”, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons symposium 2012, Springer, 2013, 93–132, arXiv:1405.3374.
- L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Landau–Ginzburg models — old and new”, Proceedings of the 18th Gokova geometry–topology conference, Gokova, Turkey. Cambridge, MA: International Press. 97–124 (2011), arXiv:1405.2953.
- N. Ilten, J. Lewis, V. Przyjalkowski, “Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau–Ginzburg Models”, Journal of Algebra 374 (2013), 104–121, arXiv:1102.4664.
- A. Iliev, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Double solids, categories and non-rationality”, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2014) 57, 145–173, arXiv:1102.2130.

4. Участие в научных конференциях

Я участвовал, в частности, в следующих конференциях.

- Conference on Homological Mirror Symmetry, Майами, США, 26 января — 31 января, 2015.
- New Techniques in Birational Geometry, Стони Брук, США, 7 апреля — 11 апреля, 2015.
- Algebraic Geometry and Applications to Physics and Dynamics, Санкт-Петербург, Россия, 25 мая — 29 мая, 2015. Доклад "Laurent phenomenon for Landau-Ginzburg models".
- Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 1, Москва, Россия, 14 сентября — 18 сентября, 2015. Организатор.
- Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 2 , Токио, Япония, 16 ноября — 20 ноября, 2015. Доклад "On Hodge numbers for Landau-Ginzburg models".
- Magadan Algebraic Geometry International Conference, Магадан, Россия, 7 декабря — 11 декабря, 2015. Организатор.
- Однодневная конференция, посвященная памяти В. А. Исковских, Москва, Россия, 29 декабря, 2015 Организатор.

5. Работа в научных центрах и международных группах

Я активно сотрудничаю с Венским Университетом.

6. Педагогическая деятельность

Я являюсь соруководителем семинара Исковских (МИАН–МГУ). Также я являюсь организатором трех конференций. Кроме того, я прочел курс лекций "Плоские кривые" (ИГУ, Иркутск, 18 февраля — 10 марта) и курс лекций "Toric Landau–Ginzburg models" (Эдинбург–Ноттингем–Лондон, Великобритания, 4 октября — 21 октября).