

Отчет 2014

Щуров Илья Валерьевич

Полученные результаты

Быстро-медленные системы на торе

Быстро-медленной системой называется семейство дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где ε — малый параметр, переменная x называется быстрой, переменная y — медленной.

В серии работ [1, 2, 3] автором были исследованы быстро-медленные системы на двумерном торе со стягиваемой связной невырожденной медленной кривой. Было доказано, что количество циклов, совершающих один обход вдоль медленной координаты, оценивается сверху числом точек складок медленной кривой.

Оказывается, что для циклов, совершающих несколько обходов вдоль медленной кривой, такой оценки нет. Более точно, справедлива следующая теорема, доказанная автором в 2014 году совместно с Н. А. Солодовниковым.

Теорема. *Для всякого натурального числа N существует открытое множество быстро-медленных систем на торе, обладающих следующими свойствами.*

- 1. Медленная кривая является выпуклой (и следовательно содержит лишь четыре точки складки).*
- 2. Число предельных циклов, совершающих два обхода вдоль направления медленного движения, не меньше N .*

Аналогичный результат был получен для системы с нестягиваемой медленной кривой и циклами, совершающими один обход, однако в этом случае сколь угодно большое количество предельных циклов удаётся построить не для открытого множества систем, а лишь для топологически типичного. Отметим, что быстро-медленные системы на двумерном торе с нестягиваемой медленной кривой были ранее обнаружены при исследовании уравнения, моделирующего динамику системы с Джозефсоновскими контактами и периодическим возмущением [6].

Клейновское туннелирование в однослойном и двуслойном графене

Автор участвует в исследовании клейновского туннелирования в графене (совместно с М. Кацнельсоном, В. Клепцыным, А. Окуновым, Д. Зубовым). Эффект клейновского туннелирования состоит в том, что плоская волна, падающая на потенциальный барьер в нормальном направлении, проходит через него, не испытывая никакого отражения (то есть коэффициент отражения равен 0). Помимо теоретического интереса, исследование этого эффекта также может быть полезно с практической точки зрения, в частности, клейновское туннелирование является препятствием к созданию графеновых транзисторов.

Оказывается (см. [7]), для однослойного графена и симметричного потенциала нулевое отражение могут испытывать плоские волны, падающие и под ненулевым углом к барьеру. Такие углы называются «магическими». Их появление кажется странным, поскольку для него требуется выполнение комплексного равенства (коэффициент отражения является комплексным числом) в семействе с одним вещественным параметром (углом падения), что не может произойти «в типичном случае». Ответом к этой загадке оказывается симметрия системы.

Аналогичное явление было обнаружено (см. [7]) и для двуслойного графена; более того, здесь оно не может быть объяснено с помощью симметрии, поскольку сохраняется в случае несимметричных барьеров.

В. А. Клепцыным была высказана гипотеза, что для магических углов в двуслойном графене с несимметричным потенциалом коэффициент отражения является лишь приблизительно нулевым. Автором она была подтверждена в результате точных численных экспериментов.

Планируется объяснить появление «почти магических» углов с двуслойном барьере близостью исследуемых потенциалов к симметричным и исследовать механику их появления.

Научные работы

Опубликован препринт [4] (совместно с Н. А. Солодовниковым).

Работа в научных центрах и международных группах

Автор является активным участником и одним из организаторов научного семинара под руководством Ю. С. Ильяшенко, объединяющего специалистов в области динамических систем из России, Франции, Швеции, США и др. стран. В 2014 году автор принял участие в работе Летней школы «Динамические системы» под руководством Ю. С. Ильяшенко, а также совершил командировку в Ренн для совместной работы с В. Клепцыным.

Педагогическая деятельность

Автором ведутся занятия в НИУ ВШЭ (лекции и/или семинары) по математическому анализу, теории вероятностей, дискретной математике, линейной алгебре, теории игр и дифференциальным уравнениям для студентов социальных и экономических специальностей. В осеннем семестре 2013-14 учебного года автором был прочитан курс «Ordinary differential equations» в программе Math in Moscow. В осеннем семестре 2014-15 учебного года автор также ведёт семинары по курсу «Динамические системы» на Факультете инноваций и высоких технологий МФТИ.

Организационная деятельность

Автор является председателем оргкомитета международной конференции «Attractors, Foliations and Limit Cycles» (Москва, Независимый Московский университет, 13-17 января 2014, <http://aflc.dyn-sys.org/>)

Автор является ответственным редактором специального выпуска «Трудов Московского математического общества» (выпуск 2 за 2015 год).

Список литературы

- [1] *I. V. Schurov* Ducks on the torus: existence and uniqueness. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **16**:2 (2010), 267–300, arXiv: 0910.1888
- [2] *Щуров И. В.* Уточные циклы в типичных быстро-медленных системах на торе Труды ММО, 2010. Т. 71. С. 200–234
- [3] *Schurov, I.* *Duck farming on the two-torus: multiple canard cycles in generic slow-fast systems* *Discrete and continuous dynamical systems*, **Supplement 2011** 1289–1298, arXiv:1008.0133.
- [4] *Ilya Schurov, Nikita Solodovnikov* Duck factory on the two-torus: multiple canard cycles without geometric constraints. arXiv:1405.3251 [math.DS]
- [5] K. J. A. Reijnders, T. Tudorovskiya, M. I. Katsnelson, Semiclassical theory of potential scattering for massless Dirac fermions. *Annals of Physics*, vol. 333, pp. 155-197 (2013)