

Отчет 2015 (итоговый)

Щуров Илья Валерьевич

Запланированные результаты

В заявке планировалось получить результаты в двух областях:

1. Быстро-медленные отображения: аналог быстро-медленных систем дифференциальных уравнений в мире динамических систем с дискретным временем.
2. Быстро-медленные системы на торе: развитие теории и её применение к исследованию уравнения, моделирующего поведение системы с джозефсоновскими контактами.

Полученные результаты за весь отчётный период

Быстро-медленные системы на торе

Быстро-медленной системой называется семейство дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где ε — малый параметр, переменная x называется быстрой, переменная y — медленной.

В серии работ 2010-11 годов автором были исследованы быстро-медленные системы на двумерном торе со стягиваемой связной невырожденной медленной кривой. Было доказано, что количество циклов, совершающих один обход вдоль медленной координаты, оценивается сверху числом точек складок медленной кривой.

Оказывается, что для циклов, совершающих несколько обходов вдоль медленной кривой, такой оценки нет. Более точно, справедлива следующая теорема, доказанная автором в 2014 году совместно с Н. А. Солодовниковым.

Теорема. *Для всякого натурального числа N существует открытое множество быстро-медленных систем на торе, обладающих следующими свойствами.*

1. *Медленная кривая является выпуклой (и следовательно содержит лишь четыре точки складки).*
2. *Число предельных циклов, совершающих два обхода вдоль направления медленного движения, не меньше N .*

Аналогичный результат может быть получен для системы с нестягиваемой медленной кривой и циклами, совершающими один обход, однако в этом случае сколь угодно большое количество предельных циклов удаётся построить не для открытого множества систем, а лишь для топологически типичного. Отметим, что быстро-медленные системы на двумерном торе с нестягиваемой медленной кривой были ранее обнаружены при исследовании уравнения, моделирующего динамику системы с Джозефсоновскими контактами и периодическим возмущением [1].

В 2014 году заявитель опубликовал совместный препринт с Н. А. Солодовниковым [2].

В 2015 году мы доказали точность нашей оценки для числа предельных циклов, более точно описали механизм появления циклов, завершили подготовку статьи и подали её в *Journal of Dynamical and Control Systems*.

Клейновское туннелирование в однослойном и двуслойном графене

Автор участвует в исследовании клейновского туннелирования в графене (совместно с М. Кацнельсоном, В. Клепцыным, А. Окуневым, Д. Зубовым). Эффект клейновского туннелирования состоит в том, что плоская волна, падающая на потенциальный барьер в нормальном направлении, проходит через него, не испытывая никакого отражения (то есть коэффициент отражения равен 0). Помимо теоретического интереса, исследование этого эффекта также может быть полезно с практической точки зрения, в частности, клейновское туннелирование является препятствием к созданию графеновых транзисторов.

Оказывается (см. Reijnders et al, 2013), для однослойного графена и симметричного потенциала нулевое отражение могут испытывать плоские волны, падающие и под ненулевым углом к барьеру. Такие углы называются «магическими». Их появление кажется странным, поскольку для него требуется выполнение комплексного равенства (коэффициент отражения является комплексным числом) в семействе с одним вещественным параметром (углом падения), что не может произойти «в типичном случае».

Ответом к этой загадке служит симметрия системы. Благодаря симметрии и сохранению некоторой кососимметричной формы (которое соответствует сохранению количества электронов) условие на наличие магического удаётся сформулировать как условие на равенство нулю некоторой *вещественной* функции. Автором совместно с В. А. Клепцыным была построена соответствующая вещественная функция: её модуль оказывается равным коэффициенту отражения, но знак может быть как положительным, так и отрицательным. В момент прохождения этой функцией нулевого значения появляется магический угол.

Аналогичное явление было обнаружено (см. Reijnders et al, 2013) и для двухслойного графена; более того, здесь оно не может быть объяснено с помощью симметрии, поскольку сохраняется в случае несимметричных барьеров.

В. А. Клепцыным была высказана гипотеза, что для магических углов в двумерном графене с несимметричным потенциалом коэффициент отражения является лишь приблизительно нулевым. Автором она была подтверждена в результате точных численных экспериментов.

Впоследствии в результате работы указанной научной группы был описан механизм возникновения таких «почти магических» углов и построен пример барьера, эффективно запирающего падающую волну в широком спектре энергий и углов. Этот результат является важным для приложений, поскольку демонстрирует возможность снятия одного из ключевых ограничений к построению графеновых транзисторов.

В 2015 году автором (совместно с М. Кацнельсоном, В. Клепцыным, А. Окуневым, Д. Зубовым) была опубликована статья [5] в Phys. Rev. B.

Глобальные бифуркации

В 2015 году Ю. С. Ильяшенко открыл принципиально новое явление в теории глобальных бифуркаций векторных полей на двумерной сфере: существует открытое множество в пространстве конечно-параметрических семейств гладких векторных полей на двумерной сфере, такое, что все семейства из этого множества являются структурно неустойчивыми и имеют числовой инвариант топологической классификации. До сих пор считалось, что такие семейства являются структурно устойчивыми в типичном случае. Доказанный факт требует кардинального пересмотра подходов к бифуркациям на двумерной сфере, основанных на понятии *версального семейства*, введенного В. И. Арнольдом.

Для доказательства теоремы об открытом множестве структурно неустойчивых семейств потребовалось исследовать так называемые мелькающие сепаратрисные связи, появляющиеся при бифуркации петли сепаратрисы. Автором была исследована эта бифуркация и найдена соответствующая асимптотика, позволяющая доказать основной результат.

Впоследствии Ю. Г. Кудряшовым было построено открытое множество семейств с функциональными инвариантами.

Подготовлен препринт (совместно с Ю. С. Ильяшенко и Ю. Г. Кудряшовым) [4], статья находится в завершающих стадиях подготовки.

Итоги и сравнение с заявкой

В области быстро-медленных отображений было получено частичное продвижение, которое пока не позволяет доказать запланированный результат.

В области быстро-медленных систем на торе и систем с джозефсоновскими контактами были получены различные результаты, опубликованные в [1, 3]. Изучение

систем с нестягиваемой медленной кривой, появляющейся в уравнении, моделирующем джозефсоновскую динамику, привёл автора к гипотезе об отсутствии ограничения на число предельных циклов, совершающих более чем один обход вдоль медленного направления, впоследствии доказанной в работе [2].

Дополнительно были получены результаты в области клейновского туннелирования [5] и глобальных бифуркаций [4]. Результаты имеют высокий научный уровень.

Всего за три года при поддержке «Династии» было опубликовано три статьи [1, 3, 5] и два препринта [2, 4].

Работа в научных центрах и международных группах

Автор является активным участником и одним из организаторов научного семинара под руководством Ю. С. Ильяшенко, объединяющего специалистов в области динамических систем из России, Франции, Швеции, США и др. стран. В 2013-15 годах автор принимал участие в работе Летней школы «Динамические системы» под руководством Ю. С. Ильяшенко.

Педагогическая деятельность

Автором ведутся занятия в НИУ ВШЭ (лекции и/или семинары) по математическому анализу, теории вероятностей, дискретной математике, линейной алгебре, теории игр и дифференциальным уравнениям для студентов социальных и экономических специальностей. Также автор читает курс Ordinary differential equations для студентов программы Math in Moscow. В 2013-14 и 2014-15 учебных годах автор принимал участие в курсе «Динамические системы» на ФИВТ МФТИ.

Организационная деятельность

Автор являлся председателем оргкомитета международной конференции «Attractors, Foliations and Limit Cycles» (Москва, Независимый Московский университет, 13-17 января 2014, <http://afic.dyn-sys.org/>)

Автор являлся ответственным редактором специального выпуска «Трудов Московского математического общества» (выпуск 2 за 2015 год).

Список литературы

- [1] *Клепцын В. А., Ромаскевич О. Л., Щуров И. В.* Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2013. Т. 8. № 1. С. 31-46.
- [2] *Ilya Schurov, Nikita Solodovnikov.* Duck factory on the two-torus: multiple canard cycles without geometric constraints. arXiv:1405.3251 [math.DS]
- [3] Филимонов Д. А., Щуров И. В., Глуцюз А. А., Клепцын В. А. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 4. С. 47-64. См. также arXiv:1301.7159 [math.DS]
- [4] Plyashenko Y., Kudryashov Y., Schurov I. An open set of structurally unstable families of vector fields in the two-sphere. arXiv:1506.06797.
- [5] V. Kleptsyn, Schurov I., A. Okunev, Zubov D., Katsnelson M. I. Chiral tunneling through generic one-dimensional potential barriers in bilayer graphene // Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics. 2015. Vol. 92. No. 16. P. 165407. See also arXiv:1507.07638.