

Отчет по гранту фонда «Династия» за 2014 год

Е. Ю. Смирнов

1. РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Флаговые многочлены Шура. Многочлены Шура — это семейство симметрических многочленов, введенных Якоби в XIX веке. Они играют важную роль в теории представлений (как характеры представлений полной линейной группы) и в комбинаторике, в особенности в задачах, связанных с таблицами Юнга. Они могут быть выражены через элементарные и полные симметрические многочлены при помощи детерминантных формул, известных как формулы Якоби–Труди. Флаговые многочлены Шура являются обобщениями классических многочленов Шура. Они были определены в 1982 году в работе А. Ласку и М.-П. Шютценберже. Флаговый многочлен Шура $s_\lambda(b)$ определяется по разбиению λ и последовательности возрастающих натуральных чисел $b = (b_1, \dots, b_n)$, называемой флагом. Для флаговых многочленов Шура также имеются детерминантные формулы выражающие их через обычные многочлены Шура и обобщающие формулы Якоби–Труди.

В совместной работе с Г. А. Мерзоном рассматриваются флаговые многочлены Шура для флага, являющегося последовательностью $(h + 1, h + 2, \dots, h + k)$; они называются *h-флаговыми многочленами Шура*. Получены новые детерминантные формулы, отличные от формул типа Якоби–Труди, выражающие *h-флаговые* многочлены Шура через 1-флаговые. Как следствие из этого получают детерминантные формулы, выражающие многочлены Шуберта сдвинутых доминантных перестановок через многочлены Шуберта перестановок более простого вида. Главные специализации и специализации в единице некоторых из этих формул имеют интересные приложения к теории плоских разбиений; так, в частности, из них получают формулы Краттенталера и Кириллова–Фомина для числа плоских разбиений внутри треугольной призмы. По данным результатам совместно с Г. А. Мерзоном опубликован препринт “Determinantal identities for flagged Schur and Schubert polynomials”, arXiv:1410.6857.

1.2. Многокомпонентные оснащенные хордовые диаграммы и биалгебра лагранжевых подпространств. В совместной работе с В. А. Клепцыным предложен способ построения весовых систем, отвечающих многокомпонентным оснащённым хордовым диаграммам. Такие диаграммы возникают при обобщении теории инвариантов узлов конечного порядка (инвариантов Васильева) на пространство многокомпонентных плоских кривых (так называемых кольчуг, или chainmails). Этот способ основан на обобщении понятия матрицы пересечений для оснащенной хордовой диаграммы обычной (однокомпонентной) плоской кривой; при этом многокомпонентной оснащённой хордовой диаграмме сопоставляется так называемое *L-пространство* — элемент грассманиана лагранжевых подпространств над полем из двух элементов. Показано, что на множестве *L-пространств* может быть определена структура биалгебры; эта биалгебра является аналогом биалгебры графов, определенной С. К. Ландо для изучения инвариантов Васильева узлов. Предварительный вариант этой

работы опубликован в виде препринта “Plane curves and bialgebra of Lagrangian subspaces”, [arXiv:1401.6160](https://arxiv.org/abs/1401.6160); в настоящее время готовится к печати расширенный и переработанный вариант текста.

1.3. Двойные комикровесовые многообразия флагов. Рассматривается семейство многообразий $X = G/P_1 \times G/P_2$, где G — редуктивная алгебраическая группа, P_1, P_2 — борелевские подгруппы, с диагональным действием группы G . В отличие от случая обычных многообразий флагов G/P , это многообразие уже, вообще говоря, не является G -однородным пространством. В работах П. Литтельмана и Дж. Стембриджа классифицированы ситуации, когда это многообразие является *сферическим*. Это значит, что представление группы G в алгебре функций на X раскладывается в сумму неприводимых представлений без кратностей; это эквивалентно тому, что борелевская подгруппа $B \subset G$ действует на X с конечным числом орбит. Замыкания этих B -орбит являются аналогами многообразий Шуберта в G/P ; работа посвящена описанию их комбинаторики и геометрии. Ранее нами было предложено комбинаторное описание орбит для группы $G = GL(n)$, т.е. группы типа A , и построены разрешения особенностей для их замыканий. Последние многообразия обладают хорошими геометрическими свойствами: так, П. Ахингер и Н. Перрен (2012) установили их нормальность, коэн-маколеевость и рациональность особенностей (П. Ахингер, Н. Перрен, 2012), при естественных дополнительных ограничениях на группы G и P — а именно, когда группа отвечает диаграмме Дынкина с простыми связями (ADE), а параболическая подгруппа P является комикровесовой (cominuscule). В настоящее время я работаю над классификацией орбит для двойных комикровесовых многообразий флагов (для произвольной редуктивной группы G , не обязательно типа ADE). Такая классификация уже получена для случая, когда G — классическая группа; осталось рассмотреть случаи двойных комикровесовых многообразий флагов типа E_6 и E_7 (для остальных исключительных групп комикровесовых параболических подгрупп не бывает).

2. ПУБЛИКАЦИИ

- (1) Е. Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающая матрица*, М.: МЦНМО, 2014, 64 с.
- (2) Е. Ю. Смирнов, *Три взгляда на ацтекский бриллиант*, М.: МЦНМО, 2015 (принято к печати), 40 с.
- (3) Victor Kleptsyn, Evgeny Smirnov, *Plane curves and bialgebra of Lagrangian subspaces*, preprint [arXiv:1401.6160](https://arxiv.org/abs/1401.6160), 26 pages
- (4) Grigory Merzon, Evgeny Smirnov, *Determinantal identities for flagged Schur and Schubert polynomials*, preprint [arXiv:1410.6857](https://arxiv.org/abs/1410.6857), 15 pages, submitted
- (5) Evgeny Smirnov, *Grassmannians, flag varieties and Gelfand–Zetlin polytopes*, preprint, 30 pages

3. ДОКЛАДЫ

- Workshop “Convex Bodies and Representation Theory”, Banff, Canada, February 2–7, 2014. Talk: *Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes*
- Seoul ICM 2014 Satellite Conference on Topology of Torus Actions and Applications to Geometry and Combinatorics, Daejeon, Republic of Korea, August 7–11, 2014. Talk: *Schubert polynomials and pipe dreams*
- Singularity Day, University of Warwick, England, October 30, 2014. Talk: *Plane curves and bialgebra of Lagrangian subspaces*

- Colloquium, Durham University, England, September 29, 2014. Talk: *Enumerative geometry and Gelfand–Zetlin polytopes*
- Algebraic Geometry Seminar, University of Warwick, England, October 8, 2014. Talk: *Determinantal formulas for flagged Schur and Schubert polynomials*
- Algebra Seminar, University of Birmingham, England, October 14, 2014. Talk: *Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes*
- EDGE Geometry Seminar, University of Edinburgh, Scotland, October 23, 2014. Talk: *Spherical double flag varieties*
- Школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 27 января – 1 февраля 2014 г. Доклад: *Детерминантные формулы для флаговых полиномов Шура*
- Нижегородское математическое общество, 14 ноября 2014 г. Доклад: «Исчислительная геометрия и многогранники Гельфанда–Цетлина»
- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов», мехмат МГУ, Москва, 12 ноября 2014 г. Доклад: «Детерминантные формулы для флаговых многочленов Шура и многочленов Шуберта»
- Семинар по алгебраической топологии им. М.М.Постникова, мехмат МГУ, Москва, 15 апреля 2014 г. Доклад: *Многочлены Шуберта и комплексы rs -графов*

4. ПРЕПОДАВАНИЕ

На факультете математики ВШЭ.

- Алгебра, 1 курс (весна 2013/14 уч.г.) — лекции, семинары;
- Алгебра, 2 курс (2014/15 уч.г.) — семинары (лектор — В.А.Кириченко);
- Алгебра, 2 курс (2014/15 уч.г.) — семинары (лектор — Г.Л.Рыбников);
- Научно-учебный семинар «Выпуклая и алгебраическая геометрия» (совместно с В.А.Кириченко, Е.Б.Фейгиным и А.И.Эстеровым, 2014/15 уч.г.);
- Спецкурс «Инварианты и представления классических групп» (весна 2013/14 уч.г., совместно с НМУ).

Лауреат премии «Лучший преподаватель» (по итогам студенческого голосования) в 2013 году, номинант в 2014 году.

Где-то еще. Продолжаю преподавать в математическом классе 57 школы (в 2014/15 году — в 10-м классе).

Принимал участие в различных школах для школьников и студентов:

- Летняя школа «Современная математика» (Дубна, июль 2014);
- Весенняя школа по математике и математической физике (Дубна, май 2014);
- Зимняя экологическая школа (Пушино, январь 2014);
- Летняя экологическая школа (Смоленская обл., июль-август 2014);
- Летний лагерь 57 школы (Ершово, Московская обл., июль 2014);
- Математический клуб «Плюс», НИУ ВШЭ – Нижний Новгород (ноябрь 2014)

Являлся одним из руководителей команды Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике (Ярославль, апрель 2014 г.).

Старший по 8-му классу на Московской математической олимпиаде в 2014/15 уч.г. (март 2015).

По материалам курса 2014 г. на Летней школе «Современная математика» подготовлена брошюра для старшеклассников и младшекурсников «Три взгляда на алтекский бриллиант», принятая в печать издательством МЦНМО.