

Отчет по гранту фонда «Династия» за 2015 год

Е. Ю. Смирнов

1. РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Двойные комиковесовые многообразия флагов. Рассматривается семейство многообразий $X = G/P_1 \times G/P_2$, где G — редуктивная алгебраическая группа, P_1, P_2 — параболические подгруппы, с диагональным действием группы G . В отличие от случая обычных многообразий флагов G/P , это многообразие уже, вообще говоря, не является G -однородным пространством. В работах П. Литтельмана и Дж. Стембриджа классифицированы ситуации, когда это многообразие является *сферическим*. Это значит, что представление группы G в алгебре функций на X раскладывается в сумму неприводимых представлений без кратностей; это эквивалентно тому, что борелевская подгруппа $B \subset G$ действует на X с конечным числом орбит. Замыкания этих B -орбит являются аналогами многообразий Шуберта в G/P ; работа посвящена описанию их комбинаторики и геометрии. Ранее нами было предложено комбинаторное описание орбит для группы $G = GL(n)$, т.е. группы типа A , и построены разрешения особенностей для их замыканий. Последние многообразия обладают хорошими геометрическими свойствами: так, П. Ахингер и Н. Перрен (2012) установили их нормальность, коэн-маколеевость и рациональность особенностей (П. Ахингер, Н. Перрен, 2012), при естественных дополнительных ограничениях — а именно, когда группа G отвечает диаграмме Дынкина с простыми связями (ADE), а параболические подгруппы P_1 и P_2 являются комиковесовыми (cominuscule).

Для сферических двойных комиковесовых многообразий флагов, т.е. прямых произведений двух грассманианов, $(B \times B)$ -орбиты являются прямыми произведениями многообразий Шуберта и параметризуются парами диаграмм Юнга (λ, μ) . Каждая $(B \times B)$ -орбита распадается в объединение B -орбит, которые, как оказывается, нумеруются инволютивными перестановками с рядом дополнительных условий, зависящих от λ и μ . При этом всегда имеется наименьшая (замкнутая) B -орбита. Совместно с А. Кнутсоном было показано, что в данной $(B \times B)$ -орбите имеется трансверсальный слайс к наименьшей B -орбите, являющийся аффинным пространством, причем пересечения замыканий B -орбит с этим слайсом являются матричными многообразиями Шуберта для некоторых частичных перестановок. Это позволяет вычислить мультистепени исходных многообразий (замыканий B -орбит). Далее, описана связь этой конструкции с орбитальными многообразиями, т.е. неприводимыми компонентами пространства верхнетреугольных матриц с нулевым квадратом, на которых борелевская подгруппа в $GL(n)$ действует присоединенным образом; комбинаторные и геометрические свойства орбит этого действия изучались, в частности, в работах А. Мельниковой, А. Джозефа, М. Бендера и Н. Перрена.

1.2. Ленточные графы и биалгебра лагранжевых подпространств. В совместной работе с В. А. Клепцыным предложена конструкция нового инварианта ленточных графов. Ленточные графы естественным образом обобщают

возникающие в теории инвариантов Васильева хордовые диаграммы (хордовую диаграмму можно рассматривать как ориентируемый ленточный граф с одной вершиной). Для хордовых диаграмм имеется определенное С. В. Дужиным и С. В. Чмутовым понятие графа пересечений; на векторном пространстве, порожденном этими графами, можно ввести структуру бIALгебры (это было сделано в работе С. К. Ландо); эта бIALгебра оказывается во многом схожей с 4-бIALгеброй хордовых диаграмм. В нашей работе по ленточному графу с n ребрами строится так называемое L -пространство — элемент лагранжева грассманиана $LGr(n)$ над полем из двух элементов. Показано, что на множестве L -пространств может быть определена структура бIALгебры, которая естественным образом обобщает бIALгебру графов. Работа опубликована в виде препринта “Ribbon graphs and bialgebra of Lagrangian subspaces”, arXiv:1401.6160v2 (текущая версия весьма существенно переработана по сравнению с исходной версией 2014 г.) и подана в печать.

2. ПУБЛИКАЦИИ

- (1) Victor Kleptsyn, Evgeny Smirnov, *Ribbon graphs and bialgebra of Lagrangian subspaces*, submitted for publication, 2015
arXiv:1401.6160v2, 21 pages.
 - (2) Grigory Merzon, Evgeny Smirnov, *Determinantal identities for flagged Schur and Schubert polynomials*, European Journal of Mathematics, 2016 (to appear).
OnlineFirst: DOI 10.1007/s40879-015-0078-9.
arXiv:1410.6857, 15 pages.
 - (3) Evgeny Smirnov, *Grassmannians, flag varieties and Gelfand–Zetlin polytopes*, More Expository Lectures on Representation Theory, Contemporary Mathematics series, AMS, 2016 (to appear).
arXiv:1508.03010, 47 pages.
 - (4) Valentina Kiritchenko, Evgeny Smirnov, and Vladlen Timorin. *Ideas of Newton–Okounkov bodies*, Snapshots of Modern Mathematics from Oberwolfach, 12 pages. <http://www.mfo.de/math-in-public/snapshots>
 - (5) Е. Ю. Смирнов, *Три взгляда на ацтекский бриллиант*, М.: МЦНМО, 2015, 48 с.
 - (6) Е. Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга и q -комбинаторика*, «Квант» №1, 2015, с. 7–12.
 - (7) Е. Ю. Бунькова, Е. Ю. Смирнов. *Как разрезать бублик?* «Квантик» №12, 2015, с. 2–3.
- (4)–(7) — научно-популярные публикации.

3. ДОКЛАДЫ, НАУЧНЫЕ ВИЗИТЫ

- Conference “Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications”, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia, 16–21 February 2015. Talk: *Spherical multiple flag varieties*;
- Conference “Geometry and Quantization”, ICMAT, Madrid, Spain, 14–18 September 2015. Talk: *Spherical multiple flag varieties*;
- Magadan Algebraic Geometry International Conference, Magadan, Russia, 6–12 December 2015. Talk: *Plane partitions and alternating sign matrices*;
- Пятая школа–конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара, Россия, 22–27 июня 2015 г. Доклад: *Сферические кратные многообразия флагов*;
- Discrete Geometry and Combinatorics Seminar, Cornell University, Ithaca, NY, USA, November 2, 2015. Talk: *Spherical multiple flag varieties*;

- Combinatorics Seminar, University of Minnesota, MN, USA, November 6, 2015. Talk: *Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes*.
- Research stay at Cornell University, Ithaca, NY, USA, October 25 – November 5, 2015. Host person: Prof. Allen Knutson.

4. ПРЕПОДАВАНИЕ

На факультете математики ВШЭ.

- Алгебра, 1 курс (2015/15 уч.г.) — лекции, семинары;
- Алгебра, 1 курс (весна 2014/15 уч.г.) — семинары (лектор — Г. Л. Рыбников);
- Алгебра, 2 курс (осень 2015/16 уч.г.) — семинары (лектор — Г. Л. Рыбников);
- Дискретная математика (весна 2014/15 уч.г., декабрь 2015/16 уч.г.) — семинары (лектор — Е. Б. Фейгин);
- Научно-учебный семинар «Выпуклая и алгебраическая геометрия» (совместно с В.А.Кириченко, Е.Б.Фейгиным и А.И.Эстеровым, 2014/15, 2015/16 уч.г.).

В Независимом московском университете.

- Алгебра, 3 семестр (осень 2015/16 уч.г.) — лекции, семинары (совм. с Г. А. Мерзоном).

Где-то еще. Продолжаю преподавать в математическом классе 57 школы (в 2014/15 году — в 11-м классе).

Принимал участие в различных мероприятиях для школьников и студентов:

- Зимняя экологическая школа (Пущино, январь 2015);
- Зимняя школа «Третий московский десант» (ИМЭИ ИГУ, Иркутск, апрель 2015);
- Летняя школа «Современная математика» (Дубна, июль 2015);
- Летняя экологическая школа (Смоленская обл., июль-август 2015);
- Летний лагерь 57 школы (Образовательный центр «Сириус», Сочи, июль 2015);
- Летняя школа «Комбинаторика и алгоритмы» (Судиславль, август 2015);
- Зимняя школа для абитуриентов магистратуры НИУ ВШЭ (Вороново, февраль 2015);
- День Высшей школы экономики в г. Кургане (19 октября 2015).

Научный руководитель трех выпускных квалификационных работ бакалавров в 2014/15 уч.г. (Н. Ваганов, И. Голубев, Д. Тюрин). Работа Д. Тюрин «Митоз для многочленов Гротендика» подана в печать и опубликована в виде препринта [arXiv:1508.01472](https://arxiv.org/abs/1508.01472).

Лауреат премии фонда Дж. Саймонса для математиков преподавателей–исследователей (весна 2014/15 уч.г., осень 2015/16 уч.г.)

Старший по 8-му классу на Московской математической олимпиаде в 2014/15 уч.г. (март 2015).

По материалам курса 2014 г. на Летней школе «Современная математика» подготовлена брошюра для старшеклассников и младшекурсников «Три взгляда на ацтекский бриллиант», опубликованная издательством МЦНМО.

5. ИТОГИ ТРЕХ ЛЕТ, СРАВНЕНИЕ С ИСХОДНОЙ ЗАЯВКОЙ

В заявке на грант «Династии» были представлены две основные темы исследований: изучение когомологий и К-теории многообразия флагов при помощи

методов выпуклой геометрии и исследование комбинаторики многочленов Шуберта и их аналогов. Запланированное по второй теме исследований выполнить удалось; часть результатов в этом направлении представлена в работе (2) настоящего отчета, часть готовится к публикации. Планы по первой теме полностью реализовать пока что не удалось. Часть результатов в этом направлении опубликована в обзорной работе (3); связь K -теории флаговых многообразий с выпуклой геометрией пока не описана.

Помимо тем, указанных в заявке, я занимался еще двумя сюжетами. Исследование двойных комикровесовых многообразий — это развитие тематики моей кандидатской диссертации (2008). Полученные в этом направлении результаты приведены в разделе 1.1 настоящего отчета и отчете по гранту «Династии» прошлого года; они сейчас готовятся к публикации. Второй сюжет — это совместная работа с В. А. Клепцыным работа о бирацальной геометрии L -пространств (см. работу (1) в списке публикаций). Она получилась из вопроса С. К. Ландо об обобщениях некоторого инварианта графов, так называемого многочлена переплетений (interlace polynomial). О ней сказано в разделе 1.2 этого отчета.