Отчет по гранту фонда “Династия” за 2013 год

Андрей Солдатенков

1. Результаты, полученные в этом году

1.1. **Голоморфные лагранжевы расслоения на гиперкомплексных многообразиях.** В совместной работе с М. Вербицким мы изучали лагранжевы расслоения на некотором классе гиперкомплексных многообразий. Гладкое многообразие M называется гиперкомплексным, если на нем заданы три интегрируемых почти-комплексных структуры I, J, K, которые удовлетворяют кватернионному соотношению $IJ = -JI = K$. Такое многообразие имеет четную комплексную размерность $2n$. На гиперкомплексном многообразии существует единственная связность без кручения, сохраняющая все три комплексных структуры – связность Обаты. Голономия этой связности является подгруппой в $GL(n, \mathbb{H})$.

Предположим, что на M задана гиперэрмитова метрика g, то есть метрика, эрмитова относительно всех трех комплексных структур. Тогда можно рассмотреть соответствующие 2-формы ω_I, ω_J, ω_K. Они определяются следующим образом: $\omega_I(X, Y) = g(IX, Y)$ и аналогично для двух оставшихся 2-форм. Рассмотрим форму $\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$. Несложно проверить, что это форма типа (2,0) относительно комплексной структуры I. Если форма Ω_I замкнута, то M называется гиперкэлеровым. При этом форма Ω_I задает голоморфную симплектическую структуру на (M, I). Лагранжевым подмногообразием в (M, I) называется такое комплексное подмногообразие N, что его касательное пространство лагранжево относительно Ω_I в каждой точке (в частности, его размерность равна n).

Лагранжевы подмногообразия гиперкэлеровых многообразий – предмет активного изучения в последние годы. Однако, понятие лагранжева подмногообразия имеет смысл и для более общих гиперкомплексных многообразий. В нашей работе мы рассматривали класс гиперкомплексных многообразий с HKT-метрикой. Это гиперэрмитова метрика g, как и выше, но удовлетворяющая более слабому условию $\partial\Omega_I = 0$. Форма Ω_I невырожденна в каждой точке, и определение лагранжева подмногообразия остается таким же, как раньше. Мы рассматривали голоморфные лагранжевы расслоения, то есть голоморфные субмерсии $\pi\colon M \to B$, где B – некоторое комплексное многообразие и все слои отображения π лагранжевы. Было доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть M – гиперкомплексное многообразие с HKT-метрикой, у которого голономия связности Обаты содержится в $SL(n, \mathbb{H})$, а $\pi\colon M \to B$ – лагранжево расслоение. Тогда база B является кэлеровым многообразием.*

Это обобщает аналогичную теорему для гиперкэлеровых многообразий. В работе также было показано, как с помощью этой теоремы строить примеры гиперкомплексных многообразий, не допускающих никакой HKT-метрики.

1.2. **Полисимплектические структуры.** В недавней работе M. Jardim, M. Verbitsky, “Trihyperkahler reduction and instanton bundles on $\mathbb{C}P^3$” было дано определение трисимплектической структуры на векторном пространстве. Пусть V – комплексное векторное пространство размерности $4k$. Подпространство $\mathbf{\Omega} \subset \Lambda^2 V$ называется трисимплектической структурой на V, если выполнены два условия:

1. $\dim \mathbf{\Omega} = 3$;

2. Рассмотрим полиномиальное отображение $p\colon \mathbf{\Omega} \to \mathbb{C}$, которое определяется так: $p(\omega) = \omega^{2k}$ (мы фиксируем изоморфизм старшей внешней степени $\Lambda^{4k}V$ и поля $\mathbb{C}$). Требуется, чтобы существовал полином $q \in S^2\mathbf{\Omega}^*$ степени 2, такой что $p = q^k$. Это значит, что множество вырожденных бивекторов в подпространстве $\mathbf{\Omega}$ должно представлять собой квадрику.

Исследовалось очевидное обобщение этого понятия: $\mathbf{\Omega}$ называется n-симплектической структурой, если $\dim \mathbf{\Omega} = n$ и выполнено второе условие. Было показано, что n-симплектические структуры можно построить для любого $n > 0$. Планируется применить их к изучению подмногообразий в гиперкэлеровых многообразиях. А именно, можно показать, что если комплексный тор представляет некоторый специальный класс когомологий в общем гиперкэлеровом многообразии, то на первых когомологиях тора возникает полисимплектическая структура. Это исследование будет продолжено в следующем году.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. A. Soldatenkov, M. Verbitsky *Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds*, arXiv:1301.0175

3. Участие в конференциях и школах

1. Summer school on moduli spaces in algebraic geometry and physics, August 12–16, 2013, Hamburg
2. Master class: around Torelli's theorem for K3 surfaces: arithmetic, geometric and dynamical aspects, October 28–November 1, 2013, Institut de Recherche de Mathématique Avancée, Strasbourg

4. Работа в научных центрах и международных группах

Я являюсь стажером-исследователем Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений, НИУ-ВШЭ, Москва. Летний семестр (с апреля по июль 2013 года) я провел в Университете Бонна, работал в группе комплексной геометрии.

5. Педагогическая деятельность

Участвовал в проведении студенческих семинарских занятий (приеме задач) в НИУ-ВШЭ. В весеннем семестре 2013 принимал задачи по курсу “Differential geometry”, в осеннем семестре – “Дифференциальная геометрия и векторные расслоения”.