Отчет 2014 года

Талалаева Д.В. о работе в рамках проекта

Высшие гомотопические алгебры Ли в задачах классификации квантовых интегрируемых систем

1 Введение

План исследования предполагал развитие двух направлений:

- Исследование двумерных квантовых интегрируемых систем и связанных с ними алгебраических структур.
- Построение аппарата деформационного квантования в контексте интегрируемых систем, то есть применение техники деформации для алгебр с оснащением в виде коммутативной подалгебры.

В 2014 году работа в основном концентрировалась вокруг первого из заявленных направлений. А именно, исследовалась роль решений уравнений тетраэдров в задаче построения инвариантов 2-узлов, были построены специальные 3-х мерные статистические модели, статсумма которых является квазиинвариантом 2-узлов. Была решена вспомогательная задача описания комбинаторной структуры n-симплициального комплекса, связанных с ним когомогий и интерпретация соответствующих классов в терминах инвариантов 2-узлов. Параллельно проводились исследования ассоциированных 2-мерных квантовых интегрируемых систем, в том числе была предъявлена конструкция коммутативного семейства по решению уравнения тетраэдров, которая обобщает известную конструкцию коммутативного семейства по решению уравнения Янга-Бакстера в 1-мерных квантовых интегрируемых системах.

2 Исследования 2014 года

2.1 n-симплициальный комплекс

В совместной работе с И. Корепановым и Г. Шарыгиным [1] был построен комплекс, связанный с решением уравнения n-симплексов, которое в свою очередь обобщает уравнение Янга-Бакстера и уравнение тетраэдров. Когомологии этого комплекса характеризуют важные структуры в задачах, связанных с уравнениями n-симплексов.

Напомним определение электрического решения уравнения тетраэдров, заданное преобразованием:

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= (x_1,y_1,z_1); \\ x_1 &= \frac{xy}{x+z+xyz}, \\ y_1 &= x+z+xyz, \\ z_1 &= \frac{yz}{x+z+xyz}.\end{aligned} \tag{1}$$

Оно связано с известным в теории электрических цепей преобразованием "звезда-треугольник которое используется при расчете электрических цепей. Электрическое преобразование определено почти всюду и может считаться преобразованием, например, пространства рациональных функций от трех переменных. Данное преобразование при специальном выборе кольца может оказываться изоморфизмом множеств. В частности, к решениям ТМУТ приводит следующая конструкция. Рассмотрим кольцо вычетов $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ где p - простое число вида $p = 4l+1$ (то есть такое, что символ Лежандра $(-1/p) = 1$) либо $p = 2$. Зафиксируем ε - один из корней из -1 в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Далее будем рассматривать множество $X = \{x \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} : x = \varepsilon \mod p\}$.

Лемма 1 *Электрическое решение корректно ограничивается на $X \times X \times X$ до автоморфизма.*

Для простоты опишем здесь частный случай конструкции n-симплициального комплекса, определенного для выбранного решения уравнения тетраэдров. Напомним, что здесь рассматривается так называемое теоретико-множественное уравнение тетраэдров (ТМУТ). Пусть X – некоторое множество, мы будем говорить, что на X задано решение ТМУТ, если задано отображение

$$X \times X \times X \xrightarrow{R} X \times X \times X, \qquad R(x,y,z) = (R_1(x,y,z), R_2(x,y,z), R_3(x,y,z))$$

такое, что выполняется соотношение

$$R_{123} \circ R_{145} \circ R_{246} \circ R_{356} = R_{356} \circ R_{246} \circ R_{145} \circ R_{123} : X^{\times 6} \to X^{\times 6}. \tag{2}$$

Изучается вопрос о раскрасках 2-граней куба размерности N. В первую очередь определим понятие согласованной раскраски 2-граней, а для этого введем понятие входящих и исходящих 2-подграней. Традиционно грани куба задаются последовательностями символов $(\tau_1, \ldots, \tau_N)$ которые могут принимать значения $0, 1, *$, где символ $*$ означает, что данная координата принимает любые значения из интервала $[0,1]$. Подгрань $g_{n-1} \subset f_n$ задается условием, что один из символов $*$ с индексом j_k принимает конкретное значение 0 или 1. Обозначим индексы звездочек последовательности $(\tau_1, \ldots, \tau_N)$ как $j_1 < \ldots < j_n$. Введем альтернированную последовательность нулей и единиц

$$\varkappa_1 = 0, \varkappa_2 = 1, \varkappa_3 = 0, \ldots,$$

Будем называть подгрань входящей, если зафиксированное значение j_k-ой компоненты подграни совпадает с $\varkappa_k$, и исходящей в противном случае. Назовем раскраску 2-граней N-куба $C : I^N \to X$ допустимой, если для каждой 3-грани цвета входящих 2-граней (x,y,z) и цвета исходящих 2-граней (x',y',z') связаны с помощью преобразования R, удовлетворяющего уравнению тетраэдров. Обозначим множество таких раскрасок $C^3(N,X)$ (в общем случае речь идет о множестве раскрасок всех подграней размерности $n-1$ в кубе I^N). Определим комплекс над полем $\Bbbk$

$$C_*((X,R),n) = \bigoplus_{N\geq n-1} \Bbbk \cdot C^n(N,\, X),$$

где $\Bbbk \cdot C_N(X,n)$ свободный $\Bbbk$-модуль, образованный $(n-1)$-раскрасками куба I^N. Дифференциал $d_N : C_N((X,R),n) \to C_{N-1}((X,R),n)$ комплекса $C_*((X,R),n)$ задается формулой

$$d_n(c) = \sum_{k=1}^{n} \left(d_k^f c - d_k^r c \right),$$

где $d_k^f c$ (соответственно $d_k^r c$) обозначает ограничение раскраски c на k-ую переднюю (соответственно, заднюю) $(N-1)$-мерную грань куба I^N, которая отождествляется с I^{N-1} очевидным образом. Передними и задними подгранями называются подграни, в обозначении которых $*$ заменяется на 1 и 0 соответственно.

Рассматривается гомологии данного комплекса, а также когомологии двойственного комплекса

$$C^N((X,R),n) = Hom(C_N((X,R),n),\Bbbk)$$

с двойственным дифференциалом. В дальнейших оказывается важным рассмотрение 3-коциклов данного комплекса для $n=3$. Явное выражение условия коцикличности может быть получено благодаря характеризации пространства допустимых раскрасок N-куба.

Лемма 2 *Допустимая раскраска определяется произвольной раскраской абсолютно входящих $n-1$ граней, то есть граней, являющихся входящими для всех n-граней их содержащих.*

В терминах раскрасок абсолютно входящих граней 3 коцикл определяется функцией $f : X^{\times 3} \to \Bbbk$, принимающее нулевое значение на образе d_4:

$$\begin{aligned}
&f(a_1,a_2,a_3) - f(R_1(a_1,a_2,a_3),a_4,a_5)\\
&+f(R_2(a_1,a_2,a_3),R_2(R_1(a_1,a_2,a_3),a_4,a_5),a_6)\\
&-f(R_3(a_1,a_2,a_3),R_3(R_1(a_1,a_2,a_3),a_4,a_5),\\
&\qquad\qquad R_3(R_2(a_1,a_2,a_3),R_2(R_1(a_1,a_2,a_3),a_4,a_5),a_6))\\
&= -f(a_3,a_5,a_6) + f(a_2,a_4,R_3(a_3,a_5,a_6))\\
&\; -f(a_1,R_2(a_2,a_4,R_3(a_3,a_5,a_6)),R_2(a_3,a_5,a_6))\\
&\; +f(R_1(a_1,R_2(a_2,a_4,R_3(a_3,a_5,a_6)),R_2(a_3,a_5,a_6)),\\
&\qquad\qquad R_1(a_2,a_4,R_3(a_3,a_5,a_6)),R_1(a_3,a_5,a_6)).
\end{aligned}$$

В дальнейшем используется мультипликативная версия данного условия для функции

$$\varphi(a,b,c) = e^{f(a,b,c)}.$$

Лемма 3 *Рассмотрим электрическое решение* (1) *уравнения тетраэдров $R\colon\ (x,y,z) \mapsto (x',y',z')$. В данном случае 3-коциклами тетраэдрального комплекса будут следующие выражения также, как и любые мономы от них:*

$$\begin{aligned}
c_1(x,y,z,x',y',z') &= y,\\
c_2((x,y,z,x',y',z') &= y'.
\end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Квазиинварианты 2-узлов

Одной из центральных для данной работы является постановка задачи описания инвариантов 2-узлов, то есть инвариантов классов изотопий вложений ориентированной сферы S^2 в четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$. Одним из распространенных способов представления 2-узлов является так называемая разрезанная поверхность или диаграмма 2-узла ([2], раздел 1.4). Для построения диаграммы узла рассматривается 3-мерная гиперплоскость H общего положения вместе с выбором нормального вектора v и проекция p поверхности S на эту гиперплоскость. Условие общего положения выражается в том, что проекция $p(S)$ имеет особенности только перечисленных ниже типов: двойная точка, тройная точка и точка ветвления (см. рис. 1). Диаграмма, таким образом, описывается следующими данными: отрезки двойных то-

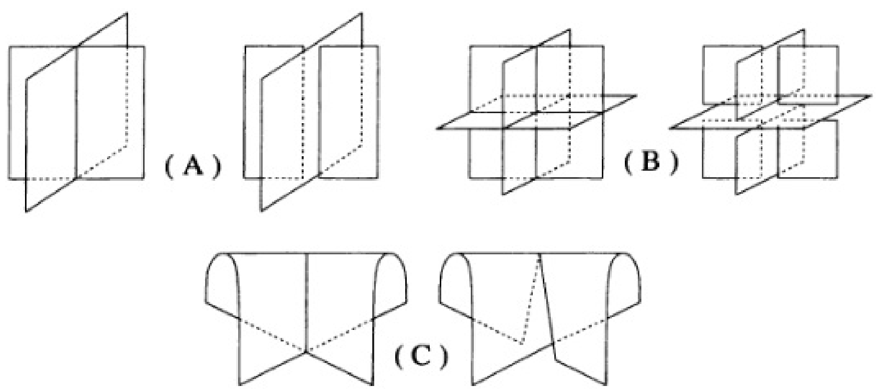

Рис. 1: Типы особенностей

чек, границами которых являются тройные точки или точки ветвления; информация о взаимном расположении листов проекции в окрестностях особых точек, а именно, какой лист находится выше или ниже по отношению к вектору проектирования на гиперповерхность.

Следующая теорема представляет собой мощное средство для изучения инвариантов 2-узлов.

Theorem 1 ([3]) *Две диаграммы представляют эквивалентные заузленные поверхности тогда и только тогда, когда одна может быть получена из другой конечной последовательностью движений из перечня на рисунке 2 и объемлющей изотопией диаграммы в 3-х мерном пространстве.*

Собственно задача состоит в том, чтобы строить изотопические инварианты диаграмм, сохраняющиеся также при движениях Розмана.

Отметим, что в работе [4] получены инварианты данной задачи с помощью аппарата когомологий квандлов и пространств раскрасок листов диаграммы 2-узла. Здесь предлагается альтернативный способ.

Напомним определение ориентации графа двойных точек и порядка вхождения ребер в тройных точках из [2]. Мы рассматриваем вложения ориентированных поверхностей, поэтому каждый лист разрезанной поверхности в диаграмме $\mathcal{D}$ оснащен выбранной нормалью. Ориентация ребра графа двойных точек выбирается таким образом, чтобы направляющий вектор вместе с нормалями верхнего и нижнего листа, пересекающихся в данном ребре, составляли положительную тройку. Каждой тройной точке присваивается знак в соответствии с ориентацией тройки нормалей

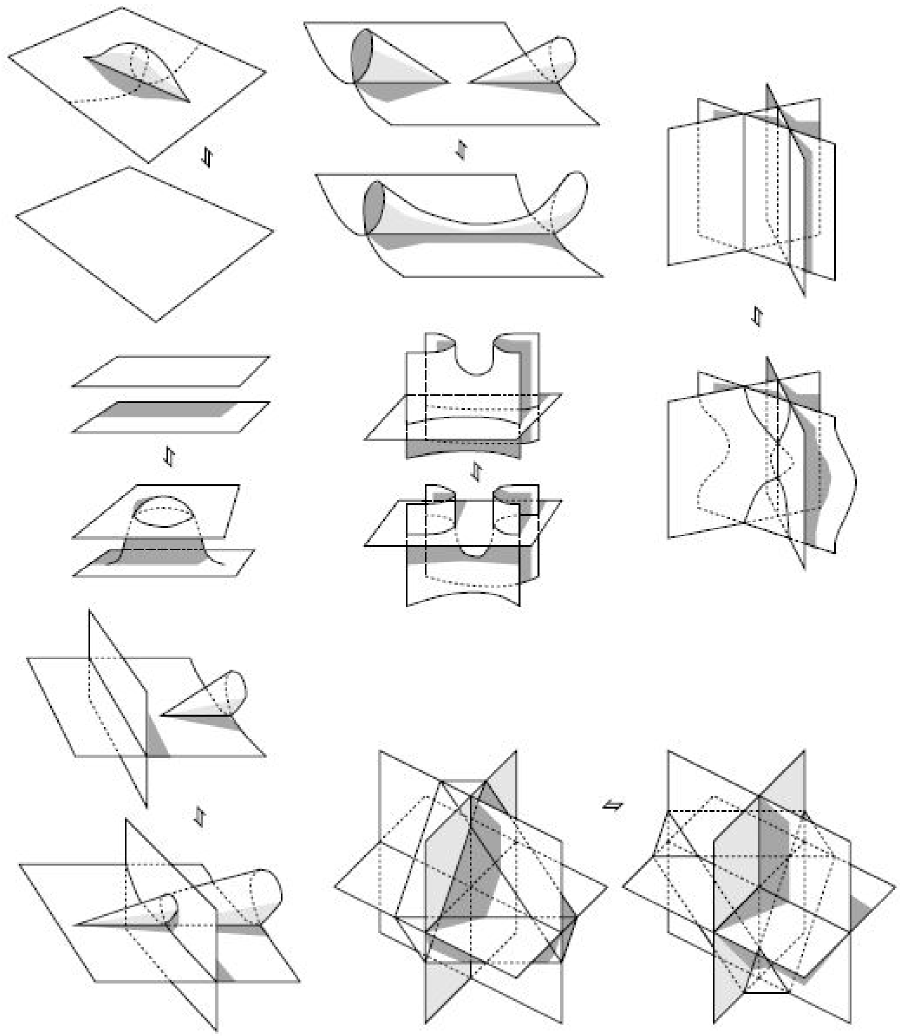

Рис. 2: Движения Розмана

соответственно к верхнему, среднему и нижнему листам, пересекающимся в тройной точке. Также может быть выбран порядок входящих ребер в тройной точке. Назовем ребро, входящее в тройную точку, дополнительным к листу, также входящему в тройную точку, если ребро не содержится в листе. Первым, вторым и третьим ребром будем считать дополнительные ребра соответственно к верхнему, среднему и нижнему листу.

Зафиксируем конечное поле X как множество значений электрического решения ТМУТ (1). Определим понятие раскраски графа двойных точек, как функцию на множестве ребер $c : E \to X$ удовлетворяющую набору условий по количеству тройных точек графа. Каждое условие локализовано в тройной точке и распространяется на цвета входных x, y, z и выходных x_1, y_1, z_1 ребер данной точки и выражается следующим образом:

$$\Phi(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1). \tag{4}$$

Множество всех таких раскрасок обозначим как $C(\mathcal{D})$. Рассмотрим функцию формального параметра s зависящую от графа двойных точек диаграммы $\mathcal{D}$, решения

ТМУТ и функции цветов трех входных ребер φ

$$Z(s, \mathcal{D}) = \sum_{C(\mathcal{D})} \prod_{\tau \in T} \varphi(x_\tau, y_\tau, z_\tau)^s \tag{5}$$

где сумма берется по множеству раскрасок графа двойных точек диаграммы $C(\mathcal{D})$, произведение - по тройным точкам графа, x_τ, y_τ, z_τ - значения цветов входящих ребер в тройную точку графа с учетом порядка, определенного выше.

Утверждение 1 *Выражение (5) инвариантно относительно 5-го движения. Кроме этого, если φ представляет собой 3-коцикл тетраэдрального комплекса, оно инвариантно относительно 7-го движения Розмана. При выборе в качестве коцикла выражения $c2/c1$ из леммы 3 получим, что кроме 5-го и 7-го движений статсумма инвариантна относительно 3-го и 6-го.*

2.3 2-мерные интегрируемые модели

Статсуммы, фигурирующие в методе построения квазиинвариантов 2-узлов естественным образом обобщаются на регулярные 3-х мерные решетки. Исследование свойств таких статистических моделей прежде всего состоит в изучении "интегрируемости" вспомогательной квантовой задачи, то есть нахождения спектра послойной трансферматрицы.

В отличие от метода серии работ [5] здесь построение основано на решении уравнения тетраэдров без спектрального параметра. В определенном смысле данный результат является двумерным обобщением метода [6], где по решению уравнения Янга-Бакстера и согласованного уравнения

$$RL \otimes L = L \otimes LR$$

строится коммутативное семейство :

$$I_k = Tr_{1 \ldots k} \underbrace{L \otimes \ldots \otimes L}_{k} \cdot \underbrace{R \bowtie \ldots \bowtie R}_{k-1}. \tag{6}$$

Здесь все операции определяются на комплексе $C^k = M^{\otimes k} \otimes \mathcal{A}$ со стандартным дифференциалом бар-комплекса:

$$\begin{aligned}
\otimes: \quad & C^k \times C^m \to C^{k+m} \\
& (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes a) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \otimes b) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \otimes ab \\
\bowtie: \quad & C^k \times C^m \to C^{k+m-1} \\
& (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes a) \bowtie (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \otimes b) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_k y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \otimes ab
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ обозначает здесь алгебру операторов, действующих в квантовых пространствах (тензорная степень векторного пространства).

В системах, описываемых решениями уравнения тетраэдров естественно допускать расширение конструкции коммутативного семейства. Для модельной периодической по двум направления трехмерной решетки было получено обобщение данного результата, а именно было обнаружено два коммутирующих между собой семейства, сохраняющих трансферматрицу, соответствующих двум направления слоя. Под послойной трансферматрицей $\Phi_{(12)*(34)}$ понимается выражение

$$\Phi_{(12)*(34)} = \Phi_{153}\Phi_{164}\Phi_{273}\Phi_{284}$$

Индексы 5,6,7,8 отвечают “квантовым” пространствам и обозначаются далее *. Доказана коммутативность двух выражений:

$$
\begin{aligned}
I_{2,1} &= Tr_{\dots}\Phi_{(12)*(34)}\Phi_{(1'2')*(3'4')}\Phi_{0(34)(3'4')}P_{(34)(3'4')}\\
I_{2,2} &= Tr_{\dots}P_{(12)(1'2')}\Phi_{0(12)(1'2')}\Phi_{(12)*(34)}\Phi_{(1'2')*(3'4')}
\end{aligned}
$$

Здесь след берется по всем индексам, кроме звездочек. Коммутативность со следом трансферматрицы $Tr\Phi_{(12)*(34)}$ следует из утверждений про коммутативное семейство 6.

3 План на 2015 год

Прежде всего в 2015 году планируется дополнение и развитие имеющихся результатов, в том числе:

- Более полное исследование квазиинвариантов 2-узлов, полученных в виде 5. Предполагается, что полученные квазиинварианты являются инвариантами бо́льшей категории 2-узлов с некоторыми оснащениями, типа оснащений 1-узлов.
- Доказательство более общего утверждения о существовании коммутативного семейства, включающего трансферматрицу трехмерной статистической модели отвечающей статсумме 5.
- Исследование физических свойств получившихся статистических моделей.
- Исследование 4-х мерных квантовых топологических теорий поля, типа BF-теории, одним из ингредиентов которой является 2-связность, и их связи с задачей построения инвариантов 2-узлов, по аналогии с тем, как теория Черна-Саймонса связана с задачей построения инварианта Джонса-Виттена.

4 Социализация

- Преподавание. Я являюсь штатным научным сотрудником механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Преподаю дисциплины: аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, линейная алгебра. Веду научно-практические занятия по геометрии для студентов кафедры Высшей геометрии и топологии. На текущий момент являюсь научным руководителем двух студентов.
- Тематика данного проекта оказалась центром работы группы исследователей в ИТЭФе, а также плодородным источником задач для студентов МехМата МГУ, находящихся под моим научным руководством.

Список литературы

[1] I. Korepanov, G.Sharygin, D.Talalaev, *Cohomologies of n-simplex relations.* arXiv:1409.3127 [math-ph]

[2] S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Surfaces in 4-space*, Encyclopaedia of mathematical sciences, Volume 142. Springer-Verlag 2004

[3] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space.* Knot theory, Banach center publications, Vol **42**, Institute of mathematics, Polish academy of sciences. Warszawa 1998.

[4] Carter, J.S., Jelsovsky, D., Langford, L., Kamada, S., Saito, M., *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947-3989.

[5] В.В. Бажанов, Ю.Г. Строганов, *Об условиях коммутативности матриц перехода на многомерной решетке.* Теоретическая и математическая физика. Т.52 N1 1982.

[6] J.M Maillet, *Lax equations and quantum groups,* Phys. Lett. B 245, 480 (1990).