Отчет 2015 года

Талалаева Д.В. о работе в рамках проекта

Высшие гомотопические алгебры Ли в задачах классификации квантовых интегрируемых систем

1 Введение

План исследования предполагал развитие двух направлений:

- Исследование двумерных квантовых интегрируемых систем и связанных с ними алгебраических структур.
- Построение аппарата деформационного квантования в контексте интегрируемых систем, то есть применение техники деформации для алгебр с оснащением в виде коммутативной подалгебры.

Центральными работами 2015 года были исследования первого направления. Были обобщены результаты 2014 года, а именно построено двухпараметрическое коммутативное семейство, включающее трансферматрицу статистической модели, строящейся по решению теоретико-множественного уравнения тетраэдров общего положения. Аналогичная статистическая модель рассматривалась на графах, соответствующих диаграммам 2-узлов. Было показано, что статистическая сумма данной модели представляет собой квази-инвариант 2-узла, в смысле описанном ниже. Проводились исследования квантовых топологических теорий поля, имеющих отношение к рассматриваемым инвариантам 2-узлов, а также изучались связи комбинаторных свойств рассматриваемых статистических моделей и кластерных алгебр, в частности свойств лорановости.

2 Исследования 2015 года

3 Описание полученных результатов

Базовым объектом работы является функциональное уравнение тетраэдров (ФУТ)

$$\Phi_{123} \circ \Phi_{145} \circ \Phi_{246} \circ \Phi_{356} = \Phi_{356} \circ \Phi_{246} \circ \Phi_{145} \circ \Phi_{123} : X^{\times 6} \to X^{\times 6}. \qquad (1)$$

решение которого является отображением декартова куба (конечного) множества X

$$X \times X \times X \xrightarrow{\Phi} X \times X \times X.$$

3.1 Квазиинварианты 2-узлов

В работах [3, 5] развивалась теория построения инвариантов 2-узлов по данным, связанным с решениями уравнения тетраэдров. Вспомогательной была разработка техники когомологий n-симплициальных комплексов $H^k(\Phi, X)$ [5](2014 год), то есть комплексов, связанных с решениями Φ функционального уравнения n-симплексов на множестве X. Данные уравнения обобщают уравнения Янга-Бакстера и уравнение тетраэдров Замолодчикова. В упомянутой работе были проинтерпретированы некоторые классы тетраэдрального комплекса, которые далее использовались для построения специальных 3-d статистических моделей и квази-инвариантов 2-узлов.

Скажем несколько слов о постановке топологической задачи: будем называть 2-узлом класс изотопий вложений ориентированной двумерной поверхности (в частности S^2) в $\mathbb{R}^4$. Традиционно в задаче описания инвариантов таких изотопий работают с диаграммами вложенных поверхностей, то есть с особыми поверхностями в $\mathbb{R}^3$, получающимися после проектирования на гиперплоскость общего положения. В этом случае особая поверхность характеризуется графом особых точек: это дуги двойных точек, тройные точки и точки Уитни; а также дополнительными данными о порядке пересечения листов поверхности в ребрах двойных точек. Согласно теореме Розмана удается классифицировать эквивалентные диаграммы, а именно, оказывается, что с точностью до объемлющей изотопии две эквивалентные диаграммы отличаются на конечное количество движений из перечня на рисунке 1. В работе [3] строится выражение по диаграмме 2-узла, решению ФУТ Φ на множестве X, а также элементу $\phi \in H^3(\Phi, X)$, в виде статистической суммы

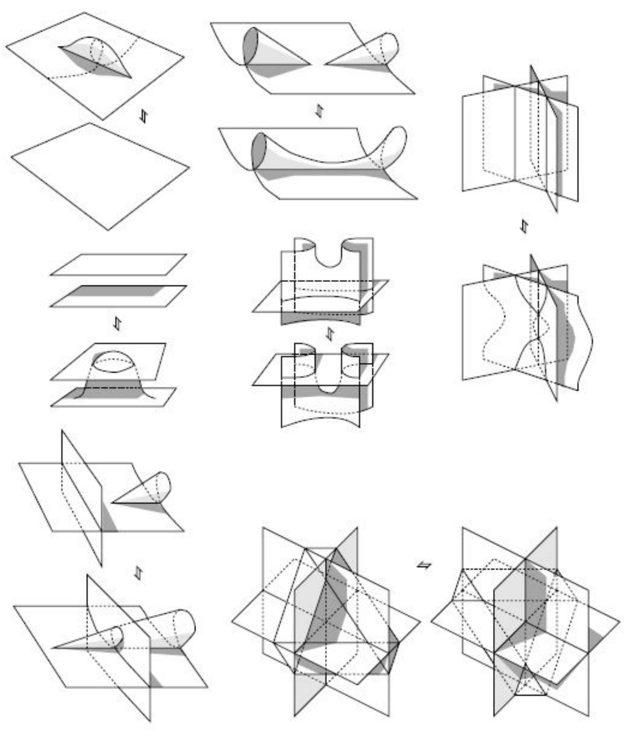

Рис. 1: Движения Розмана

$$\chi_\phi(s;\Gamma) = h^{-d} \sum_{c(\Gamma)} \prod_{O \in \Gamma_6} \phi^{\sigma(O)s}(x_O, y_O, z_O), \tag{2}$$

где суммирование производится по $c(\Gamma)$ - множеству раскрасок ребер графа особых точек элементами множества X так, что в тройных точках цвета 6-и ребер были связаны посредством решения ФУТ, произведение берется по тройным точках диаграммы O, h - мощность множества X, а d - количество связных компонент графа, $\sigma(O)$ - знак тройной точки, определяемый по общей ориентации поверхности, x_O, y_O, z_O - цвета входящих ребер в тройной точке. Выражение 2 оказывается инвариантным относительно всех нечетных движений Розмана, а при специальном выборе коцикла для электрического решения ФУТ - также относительно движения 6.

3.2 Интегрируемые статистические модели в $d = 3$

Та же статистическая модель может быть рассмотрена на регулярной периодической $K \times L \times M$ - решетке. Статсумма принимает вид

$$Z(s) = \sum_{Col} \prod_{i,j,k} \phi(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})^s.$$

где $x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}$ - цвета трех входящих ребер в тройной точке с номером i, j, k, ϕ - как и прежде элемент $H^3(\Phi, X)$. Оказывается, что такая статсумма может быть представлена через послойную трансферматрицу в виде

$$Z(s) = Tr_{V_{\alpha\beta}} T(s)^L. \tag{3}$$

где

$$T(s) = Tr \prod_{\alpha} \prod_{\beta} A_{\alpha\beta}(s)$$

означает произведение по горизонтальным пространствам матриц $A_{\alpha\beta}(s)$, которые в свою очередь строятся по решению ФУТ Φ и $\phi \in H^3(\Phi, X.)$ Представление 3 позво-

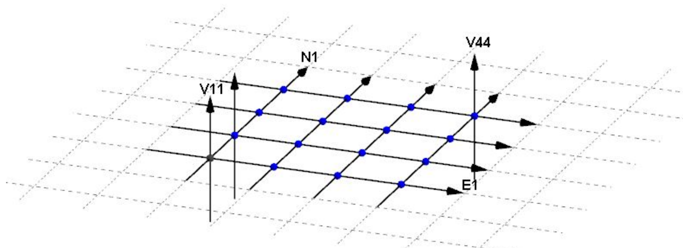

Рис. 2: 1-слойное произведение

ляет свести вопрос нахождения свойств таких статсумм к задаче описания спектра трансферматрицы, тем самым устанавливая связь с центральным вопросом теории квантово-механических интегрируемых систем. В работе [4] была установлена интегрируемость данной модели, то есть возможность включения трансферматрицы в семейство коммутирующих операторов, действующих в тензорном произведении вертикальных пространств. Для формулировки утверждения введем некоторые обозначения:

$$\Phi_{(i)*(j)} = \Phi_{(i_1 \ldots i_k)*(j_1 \ldots j_m)} = \prod_{\alpha=\overrightarrow{1,\ldots k}}^{\beta=\overrightarrow{1,\ldots m}} \Phi_{i_\alpha l_{\alpha\beta} j_\beta}$$

Трансферматрица представляется в этом случае в виде следа:

$$T = I_1 = Tr_{(i)(j)}\Phi_{(i)*(j)}.$$

Рассмотрим также подкрученные генераторы:

$$\Phi^L_{123} = P_{12}\Phi_{123}, \qquad \Phi^R_{123} = \Phi_{123}P_{23}.$$

Простым следствием теоремы Майе [6] является результат

Лемма 1 *Для решения уравнения тетраэдров общего положения имеются два коммутативных семейства*

$$I_{0,k} = Tr_{i_l,j_l,s_m} \prod_{\overrightarrow{l=1,\dots,k}} \Phi_{(i_m)*(j_m)} \prod_{\overrightarrow{m=1,\dots,k-1}} \Phi^R_{s_m(j_m)(j_{m+1})}$$

и

$$I_{n,0} = Tr_{i_l,j_l,t_m} \prod_{\overrightarrow{l=1,\dots,n}} \Phi_{(i_m)*(j_m)} \prod_{\overrightarrow{m=1,\dots,n-1}} \Phi^L_{(i_m)(i_{m+1})t_m}$$

содержащих трансферматрицу.

Наш главный результат состоит в том, что

Теорема 1 *Для решения уравнения тетраэдров* Φ *общего положения семейства* $I_{n,0}$ *и* $I_{0,k}$ *коммутируют между собой.*

4 Публикации 2015 года

(1) D. Talalaev *Zamolodchikov tetrahedral equation and higher Hamiltonians of 2d quantum integrable systems,* [math-ph] arXiv:1505.06579. Представлено к публикации в Communications in Mathematical Physics.

(2) I. Korepanov, G. Sharygin, D. Talalaev, *Cohomology of the tetrahedral complex and quasi-invariants of* 2*-knots*, arXiv:1510.03015

(3) G. Sharygin, D. Talalaev *Deformation quantization of integrable systems*, arXiv:1210.2840, Принято к публикации в Journal of Noncommutative Geometry.

5 Участие в конференциях

(1) Конференция “Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications”, Skoltech, Moscow. Даты 16-20.02.2015. Доклад “2-knot quasi-invariants and 2-dimensional quantum integrable systems”.

(2) Школа и конференция “Statistical Mechanics, Integrability and Combinatorics”, Galileo Galilei Institute, Florence. Даты 18-30.05.2015. Доклад “Quasi-invariants of 2-knots and 3-d integrable statistical models”.

(3) Конференция “Классические и квантовые интегрируемые системы”, Протвино, даты 6-10.07.2015. Доклад “Quasi-invariants of 2-knots and 3-d integrable statistical models”.

(4) Конференция “Дни геометрии в Новосибиске”, Институт математики им. Соболева, Новосибирск. Даты 25-28.08.2015. Доклад “Quasi-invariants of 2-knots and 3-d integrable statistical models”.

6 Преподавание

- Я являюсь штатным научным сотрудником механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Преподаю дисциплины: аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, линейная алгебра. Веду научно-практические занятия по геометрии для студентов кафедры Высшей геометрии и топологии. На текущий момент являюсь научным руководителем двух студентов.

- Тематика данного проекта оказалась центром работы группы исследователей в ИТЭФе, а также плодородным источником задач для студентов МехМата МГУ, находящихся под моим научным руководством.

7 Краткий этог за три года и перспективы

Наиболее интенсивно развивалось направление проекта, связанное с высшими косами, то есть с геометрической реализацией уравнения тетраэдров. Оказалось, что непосредственно данное уравнение связано с задачей построения квази-инвариантов 2-узлов. Кроме этого, оказалось, что аппарат, используемый для этого имеет важную интерпретацию в теории квантовых интегрируемых 2-мерных моделей и статистических интегрируемых моделей в 3d.

Полученные результаты предполагают возможное развитие в следующих направлениях:

- квантовыхе топологические теории поля, в том числе BF-теории, и инварианты 2-узлов (аналог конструкции Джонса-Виттена);

- обобщения конструкций типа Хитчина классических интегрируемых систем на случай 2-мерных спектральных многообразий;

- исследование физических свойств полученных статистических моделей.

Список литературы

[1] G. Sharygin, D. Talalaev *Deformation quantization of integrable systems*, arXiv:1210.2840

[2] A. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **79** (1980) 641ГЂВЦ664. [English translation: Soviet Phys. JETP **52** (1980) 325-326].

[3] I. Korepanov, G. Sharygin, D. Talalaev, *Cohomology of the tetrahedral complex and quasi-invariants of* 2*-knots*, arXiv:1510.03015

[4] D. Talalaev *Zamolodchikov tetrahedral equation and higher Hamiltonians of 2d quantum integrable systems,* [math-ph] arXiv:1505.06579

[5] I. Korepanov, G. Sharygin, D. Talalaev, *Cohomologies of n-simplex relations*, [math-ph] arXiv:1409.3127

[6] J.M Maillet, *Lax equations and quantum groups*, Phys. Lett. B **245**, 480 (1990).