Отчет по гранту фонда Династия за 2014 год

Владлен Тиморин

Результаты, полученные в этом году

Главная кубиоида. Пространство параметров кубических многочленов состоит из классов аффинной сопряженности кубических многочленов с комплексными коэффициентами. Множество $\mathcal{M}_3$ классов многочленов со связными множествами Жюлиа называется *кубическим множеством Мандельброта.* Главная кубиоида CU определяется как множество классов кубических многочленов, у которых есть неподвижная неотталкивающая точка, нет отталкивающих периодических точек, разделяющих множество Жюлиа, и есть не более одной неотталкивающей периодической точки с мультипликатором, отличным от 1. Это опреледение мотивировано тем, что замыкание главной компоненты внутренности $\mathcal{M}_3$ (состоящей из классов гиперболических многочленов, множества Жюлиа которых являются жордановыми кривыми) лежит в CU. Многочлены с неотталкивающей неподвижной точкой, классы которых не лежат в CU, допускают явную комбинаторную классификацию [3]. Таким образом, CU является кубическим аналогом главной кардиоиды (центральной части множества Мандельброта).

В работе [2] доказано, что $\overline{\mathrm{PHD}}_3 \subset \mathrm{CU}$, и сформулирована гипотеза о том, что $\overline{\mathrm{PHD}}_3 = \mathrm{CU}$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{F}$, состоящее из многочленов

$$f_{\lambda,b}(z) = \lambda z + bz^2 + z^3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Любой кубический многочлен аффинно сопряжен многочлену из пространства $\mathcal{F}$, так что рассмотрение только этого пространства не приводит к потере общности. Заметим, что точка 0 является неподвижной точкой каждого многочлена пространства $\mathcal{F}$. Определим λ-*срез* $\mathcal{F}_\lambda$ как множество всех многочленов $g \in \mathcal{F}$ таких, что $g'(0) = \lambda$. Скажем, что $f \in \mathcal{F}_\lambda$ *устойчив*, если он J-устойчив в срезе $\mathcal{F}_\lambda$ с $\lambda = f'(0)$. Обозначим через $\mathcal{P}_\lambda$ пространство многочленов $f \in \mathcal{F}_\lambda$, классы которых принадлежат замыканию главной гиперболической компоненты. В работе [7] был получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathcal{W}$ — ограниченная компонента множества $\mathcal{F}_\lambda \setminus \mathcal{P}_\lambda$, где $|\lambda| \le 1$. Тогда всякий многочлен $f \in \mathcal{W}$ устойчив, не имеет ни отталкивающих периодических разделяющих точек, ни нейтральных периодических точек, отличных от* 0*. Более того, $\mathcal{W}$ имеет либо тип* Зигелевского захвата, *либо* странный *тип.*

Мы говорим, что $\mathcal{W}$ имеет тип *Зигелевского захвата*, если любой $f \in \mathcal{W}$ имеет инвариантный диск Зигеля U вокруг 0 и другую компоненту Фату V, такую, что отображение $f|_V$ является двулистным разветвленным накрытием, причем $f^{\circ k}(V) = U$ для некоторого $k > 0$. Компонента $\mathcal{W}$ имеет *странный* тип, если множество Жюлиа $J(f)$ связно, содержит критическую точку, имеет положительную меру Лебега и инвариантное измеримое поле направлений.

Планаризации. Теорема Мебиуса-фон Штаудта, часто называемая *основной теоремой проективной геометрии*, утверждает, что биективное преобразование вещественной проективной плоскости, переводящее прямые в прямые, является проективным преобразованием. У этой теоремы есть локальные аналоги. Мы рассматриваем локальные вопросы, продолжающие тот вопрос, на который отвечает основная теорема проективной геометрии. А именно, мы рассматриваем локальную классификации отображений, переводящих отрезки прямых в дуги плоских кривых.

Более точно, пусть $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — открытое подмножество вещественной проективной плоскости. Достаточное число раз дифференцируемое отображение $\Phi : U \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ называется *планаризацией*, если для всякой прямой $\lambda \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ множество $\Phi(\lambda \cap U)$ лежит в некоторой плоскости. Планаризации названы так по аналогии с *коллинеациями*, отображениями, переводящими прямые в прямые. Рассмотрение планаризаций полезно для решения задач такого вида. Дано линейное семейство $\mathcal{L}$ кривых в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (например, семейство всех окружностей, семейство всех коник и проч.). Описать все отображения, переводящие отрезки прямых в отрезки кривых семейства $\mathcal{L}$. Например, если $\mathcal{L}$ — трехмерное линейное семейство кривых, то всякое отображение f из открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, переводящее отрезки прямых в дуги $\mathcal{L}$-кривых, задает следующую планаризацию $\Phi : V \to \mathcal{L}$. Множество $V \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2*}$ состоит из тех прямых λ, для которых есть только одна $\mathcal{L}$-кривая γ, содержащая множество $f(\lambda \cap U)$, а $\Phi(\lambda)$ совпадает с γ. В работе [4] доказан следующий результат.

Теорема. *Рассмотрим планаризацию $\Phi : U \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Существует непустое открытое подмножество $V \subset U$, такое, что планаризация $\Phi : V \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ тривиальна, или котривиальна, или квадратична, или двойственно квадратична.*

Мы должны дать необходимые пояснения. Планаризация $\Phi : V \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ называется *тривиальной*, если $\Phi(V)$ — подмножество плоскости. Планаризация $\Phi : V \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ *котривиальна*, если найдется точка $b \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, такая, что для всякой прямой $\lambda \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, множество $\Phi(\lambda \cap V)$ лежит в плоскости, проходящей через b. Формально, тривиальные планаризации включаются в котривиальные, однако мы разделяем эти два класса по той причине, что котривиальных планаризаций, не являющихся тривиальными, «меньше», чем тривиальных, а также в связи с частичной двойственностью между тривиальными и котривиальными планаризациями. Квадратичное отображение из $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{RP}^3$ — это рациональное отображение (которое, вообще говоря, может иметь точки неопределенности в $\mathbb{RP}^2$), заданное в однородных координатах набором из четырех однородных квадратичных форм от трех переменных. Любое квадратичное отображение из $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{RP}^3$ является планаризацией.

Наконец, двойственно квадратичные планаризации связаны с квадратичными планаризациями при помощи следующей версии проективной двойственности. Пусть $\Phi : U \to \mathbb{RP}^3$ — планаризация. Рассмотрим открытое множество V двойственной проективной плоскости $\mathbb{RP}^{2*}$, состоящее из всех прямых $\lambda \subset \mathbb{RP}^2$, таких, что $\Phi(\lambda \cap U)$ лежит в единственной плоскости P_λ. Если V непусто, то определена *двойственная планаризация* $\Phi^* : V \to \mathbb{RP}^{3*}$, сопоставляющая прямой $\lambda \in V$ плоскость P_λ. *Двойственно квадратичные планаризации* — это планаризации, двойственные к квадратичным.

Естественно рассматривать планаризации с точностью до следующего отношения эквивалентности: две планаризации эквивалентны, если, после проективного преобразования в прообразе и проективного преобразования в образе, они совпадают на некотором непустом открытом множестве. Конечно, тривиальные и котривиальные планаризации образуют бесконечно много классов. Но все остальные планаризации разбиваются ровно на 16 классов, и все эти классы явно описаны (можно выписать явные простые формулы для представителей этих классов).

Список литературы

[1] A. Khovanskii, V. Timorin, *On the theory of coconvex bodies*, Discrete and Computational Geometry, **52**:4 (2014), 806–823.

[2] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *The main cubioid*, Nonlinearity **27**:8 (2014), 1879–1897.

[3] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Laminations from the Main Cubioid*, to appear in CGDS.

[4] V. Petruschenko, V. Timorin, *On maps taking lines to plane curves*, submitted to IMRN

[5] В.А. Тиморин, *Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными*, учебник, подготовленный в рамках проекта Издательского Дома НИУ ВШЭ, примерно 300 стр.

[6] A. Khovanskii, V. Timorin, *Aleksandrov-Fenchel inequality for coconvex bodies*, preprint

[7] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Complementary components to the Principal Hyperbolic Domain*, preprint

[8] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Combinatorial models for spaces of cubic polynomials*, preprint

[9] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Smart criticality*, preprint

Участие в конференциях и школах

январь: конференция “Attractors, Foliations and Limit Cycles”, Москва.

февраль: международная конференция “Okounkov bodies and representation theory”, Банфф (Канада)

февраль: международная конференция “Okounkov bodies and applications”, Обервольфах (Германия)

июнь–июль: летняя школа по динамическим системам, Дубна.

сентябрь: международная конференция “Differential and difference equations, dynamical systems”, Хомбург, Саар (Германия)

ноябрь: международная конференция “Legacy of Vladimir Arnold”, Торонто (Канада)

Доклады на семинарах:

- семинар по динамическим системам, МГУ
- семинар по дискретной и вычислительной геометрии, ИППИ РАН
- семинар по квантовой теории поля, НИУ ВШЭ
- семинар по геометрии и динамике, НИУ ВШЭ

Работа в научных центрах и международных группах

Продолжается наш совместный проект с коллегами из университета Алабамы в Бирмингеме, Александром Блохом и Лексом Оверстигеном. С российской стороны в нем, кроме меня, участвовал Росс Птачек, который был постдоком в НИУ ВШЭ в 2013–2014.

Вместе с Россом Птачеком, я занимался организацией международной конференции “Topological and geometric methods in low-dimensional dynamical systems”. Конференция проводилась с 11 по 16 мая в Москве при поддержке

НИУ ВШЭ (в частности, лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений), НМУ, РФФИ, Балтийского института математики и университета Марселя. Сайт конференции `http://math.hse.ru/en/confmay2014`

Педагогическая и административная деятельность

Я преподаю на факультете математики Высшей Школы Экономики. В этом году, я читал следующие курсы:

1. Mathematical Methods of Science (основной курс магистратуры)
2. History of Mathematics (основной курс магистратуры)

Кроме того, я руковожу (вместе с А.И. Буфетовым, А.В. Клименко и Г.И. Ольшанским) семинаром “Геометрия и динамика” для студентов факультета математики. Я являюсь заместителем декана факультета математики по международным связям. С этой должностью связана существенная административная нагрузка.

Я руковожу следующими курсовыми и выпускными квалификационными работами:

Зыков Антон Константинович: Аналоги задачи Сильвестра для линейных систем алгебраических кривых

Коротких Сергей Юрьевич: Представления алгебр Клиффорда и соотношения Гурвица с суммами квадратов

Амбарцумов Николай Григорьевич: Геометрия тканей

Слонимский Денис Львович: Цепные дроби и классы квадратичных форм

Шепелевцева Анастасия Андреевна: Вычисление итерированных групп монодромии для захватов

Мелихова Екатерина Владимировна: f-векторы многогранников Гельфанда–Цетлина

Петрущенко Всеволод Владимирович: Планаризации