Отчет по гранту фонда Династия за 2015 год

Владлен Тиморин

Результаты, полученные в этом году

Пространство параметров кубических многочленов состоит из классов аффинной сопряженности кубических многочленов с комплексными коэффициентами. Множество $\mathcal{M}_3$ классов многочленов со связными множествами Жюлиа называется *кубическим множеством Мандельброта*. Главная кубиоида CU определяется как множество классов кубических многочленов, у которых есть неподвижная неотталкивающая точка, нет отталкивающих периодических точек, разделяющих множество Жюлиа, и есть не более одной неотталкивающей периодической точки с мультипликатором, отличным от 1. Это определение мотивировано тем, что замыкание главной компоненты внутренности $\mathcal{M}_3$ (состоящей из классов гиперболических многочленов, множества Жюлиа которых являются жордановыми кривыми) лежит в CU.

В совместной работе В.Тиморина с А.Блохом, Л.Оверстигеном и Р.Птачеком [1] изучается геометрия одномерных комплексных срезов пространства параметров кубических многочленов. Как нетрудно видеть, любой кубический многочлен аффинно сопряжен многочлену вида

$$f_{\lambda,b}(z) = \lambda z + bz^2 + z^3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C}$$

для некоторых комплексных чисел λ, b. Множество всех многочленов такого вида мы обозначим через $\mathcal{F}$, а множество всех многочленов $f_{\lambda,b}$ с фиксированным λ — через $\mathcal{F}_\lambda$. Заметим, что λ — это мультипликатор неподвижной точки 0 многочлена $f_{\lambda,b}$. Таким образом, одномерные срезы $\mathcal{F}_\lambda$ двумерного пространства $\mathcal{F}$ имеют динамический смысл.

Следующие результаты дают описание параметрических срезов $\mathcal{F}_\lambda$, аналогичное представлению множества Мандельброта в виде объединения главной кардиоиды и кильватерных струй множества Мандельброта, допускающих явное динамическое описание. Точки θ единичной окружности мы будем отождествлять с точками множества $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Обозначим через $L(\theta)$ дугу единичной окружности с концами $\theta \pm \frac{1}{3}$, содержащую точку θ. Определим подмножество $\mathfrak{Q}$ единичной окружности как замыкание множества точек θ со следующим свойством: все элементы $3^k\theta$ орбиты точки θ относительно отображения утроения угла принадлежат дуге $L(\theta)$. Под *дырками* множества $\mathfrak{Q}$ мы имеем в виду компоненты дополнения до этого множества в единичной окружности. Напомним, что *внешние лучи* компактного подмножества K сферы Римана $\mathbb{C}P^1$, дополнение до которого односвязно, определяются как образы прямых радиальных интервалов при конформном изоморфизме между единичным диском и $\mathbb{C}P^1 \setminus K$.

Внешние лучи параметризуются углами или, что эквивалентно, точками единичной окружности. Мы говорим, что внешний луч множества K *заканчивается* в точке z, если z — единственная точка множества K, лежащая в замыкании внешнего луча. *Параметрическими лучами* в $\mathcal{F}_\lambda$ мы будем называть внешние лучи множества $\mathcal{C}_\lambda$, состоящего из всех многочленов $f \in \mathcal{F}_\lambda$ со связным множеством Жюлиа.

Теорема. *Пусть λ — комплексное число, такое, что $|\lambda| \leqslant 1$. Для всякой дырки (θ_1, θ_2) множества $\mathfrak{Q}$, параметрические лучи $\mathcal{R}_\lambda(\theta_1)$ и $\mathcal{R}_\lambda(\theta_2)$ заканчиваются в одной и той же точке.*

Таким образом, пара параметрических лучей $\mathcal{R}_\lambda(\theta_1)$ и $\mathcal{R}_\lambda(\theta_2)$, вместе с точкой, в которой они оба заканчиваются, делит плоскость на две открытые части. Пусть (θ_1, θ_2) — дырка множества $\mathfrak{Q}$, и пусть $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ — компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{R}_\lambda(\theta_1) \cup \mathcal{R}_\lambda(\theta_2)}$, содержащая параметрические лучи с аргументами в (θ_1, θ_2). Множество $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ называется*(параметрической) кильватерной струей* (среза $\mathcal{F}_\lambda$). Точка, в которой заканчиваются оба луча $\mathcal{R}_\lambda(\theta_1)$ и $\mathcal{R}_\lambda(\theta_2)$, называется *корневой точкой* параметрической кильватерной струи $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$. Определим *период* параметрической кильватерной струи $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ как период точки $\theta_1 + \frac{1}{3}$ относительно отображения утроения угла. *Динамические лучи* многочлена f — это внешние лучи его заполненного множества Жюлиа (их можно определить динамическим способом в том числе и в случае, когда заполненное множество Жюлиа несвязно). Следующая теорема дает динамическое описание параметрических кильватерных струй.

Теорема. *Зафиксируем дырку (θ_1, θ_2) множества $\mathfrak{Q}$ и параметрическую кильватерную струю $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$ среза $\mathcal{F}_\lambda$. Тогда, для всякого $f \in \mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$, динамические лучи $R_f(\theta_1 + \frac{1}{3})$, $R_f(\theta_2 + \frac{2}{3})$ заканчиваются в одной и той же точке, которая либо отталкивает для всех $f \in \mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$, либо совпадает с точкой 0 для всех $f \in \mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$. Если f_{root} — корневая точка параметрической кильватерной струи $\mathcal{W}_\lambda(\theta_1, \theta_2)$, то динамические лучи $R_{f_{root}}(\theta_1 + \frac{1}{3})$, $R_{f_{root}}(\theta_2 + \frac{2}{3})$ заканчиваются в одной и той же параболической периодической точке.*

Напомним, что континуум (связное компактное множество) X на плоскости называется *полным*, если дополнение до этого континуума состоит из одной неограниченной компоненты.

Теорема. *Множество $\mathcal{C}_\lambda$ лежит в объединении среза CU_λ главной кубиоиды и параметрических кильватерных струй. Срез главной кубиоиды CU_λ является полным континуумом.*

Перечисленные результаты готовятся к публикации. В рамках международной конференции "Conference of Complex Analysis in China 2015 проведенной в Пекине с 12.10.2015 по 16.10.2015 Китайской академией наук, В.А. Тиморин выступил с приглашенным докладом “Slices of the parameter space of cubic polynomials в котором были изложены, в частности, описанные выше результаты.

Список литературы

[1] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin,“Slices of the Parameter Space of Cubic Polynomials”, in preparation.

[2] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Laminations from the Main Cubioid*, to appear in CGDS.

[3] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Complementary components to the Principal Hyperbolic Domain*, preprint

[4] A. Blokh, L. Oversteeegen, R. Ptacek, V. Timorin, *Quadratic-like dynamics of cubic polynomials*, to appear in Communications in Mathematical Physics

[5] V. Petruschenko, V. Timorin, *On maps taking lines to plane curves*, to appear in Arnold Mathematical Journal (2016).

[6] В.А. Тиморин, *Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными*, учебник, подготовленный в рамках проекта Издательского Дома НИУ ВШЭ, примерно 300 стр.

Участие в конференциях и школах

февраль международная конференция “Algebraic structures in convex geometry Москва.

май международная конференция “XXV years of low dimensional dynamics at Stony Brook”, Стони Брук (США).

август международная конференция “The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry”, Долгопрудный.

октябрь международная конференция “Conference on Complex Analysis in China”, Пекин.

Доклады на семинарах

- Клуб плюс, Нижний Новгород.
- Семинар по динамическим системам, Нижний Новгород.

Работа в научных центрах и международных группах

Продолжается наш совместный проект с коллегами из университета Алабамы в Бирмингеме, Александром Блохом и Лексом Оверстигеном.

Педагогическая и административная деятельность

С апреля 2015 года на меня возложены обязанности декана факультета математики НИУ ВШЭ.

Я руковожу курсовыми работами двух студентов первого курса и одной студентки магистратуры.