

## Отчет по гранту фонда Династия за 2013 год.

Войнов Андрей.

### 1. Результаты, полученные в этом году.

Основными темами, которые изучались в этом году были полугруппы матриц с постоянным спектральным радиусом и кратчайшие положительные произведения в примитивных матричных полугруппах. Начнем с первой темы, исследование по ней велось совместно с В.Ю.Протасовым.

Обозначим через  $\mathcal{S}$  некоторую полугруппу по умножению вещественных квадратных матриц, действующих в  $\mathbb{R}^d$ . Дополнительно будем считать, что  $\mathcal{S}$  неприводима, т.е. у ее операторов нет общих инвариантных подпространств, данное ограничение несущественно, однако, удобно. Полугруппа  $\mathcal{S}$  называется полугруппой с постоянным спектральным радиусом, если спектральный радиус всех ее элементов совпадает (тогда, не ограничивая общности, можно считать, что он равен 1). Такие полугруппы встречаются, например, в функциональных уравнениях самоподобия, в задачах оценки гладкости решений некоторых масштабирующих уравнениях и в других областях.

Изучалась структура полугрупп с постоянным спектральным радиусом в терминах их инвариантных подпространств. Опишем основные результаты, полученные в этом направлении. Пусть  $\mathcal{S}$  – полугруппа  $d \times d$ -матриц с постоянным спектральным радиусом. Обозначим через  $r$  минимальный ранг элемента полугруппы  $\mathcal{S}$ . Через  $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{S}$  обозначим подполугруппу операторов ранга  $r$ . Если  $r = d$ , показывается, что полугруппа в некотором подходящем базисе является подгруппой ортогональной группы. Если полугруппа содержит вырожденные матрицы, то в подходящем базисе все элементы из  $\mathcal{S}_r$  являются ортогональными операторами в своем образе. Любой оператор из  $\mathcal{S}$  имеет в координатной записи ортогональный верхний  $r \times r$  блок. Тогда любой оператор из  $\mathcal{S}$  будет отображать в себя некоторое множество, являющееся пересечением круговых цилиндров с основаниями размерности  $r$ . Из этих результатов удается явно описать все полугруппы с постоянным спектральным радиусом при  $d = 2, 3$  и в случае  $r = d - 1, 1$ .

Перейдем к формулировке результатов, связанных с минимальными положительными произведениями неотрицательных матриц. Пусть задана конечно-порожденная матричная полугруппа  $\mathcal{A} = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$ , причем все элементы порождающих – неотрицательные вещественные числа. Такая полугруппа называется примитивной, если в  $\mathcal{A}$  найдется матрица, у которой все элементы положительны. Это определение обобщает понятие примитивности одной неотрицательной матрицы, для примитивных полугрупп существует обобщение теории Перрона-Фробениуса

о связи собственных значений и комбинаторной структуры неотрицательной матрицы. В 2013 году была продолжена работа по оценке минимального числа образующих примитивной полугруппы, которые в произведении дают положительную матрицу. Была уточнена верхняя полиномиальная по размерности и независящая от числа образующих оценка. Получена связь исследуемой задачи с гипотезой Черни о минимальной длине синхронизирующего слова в конечном автомате.

## 2. Опубликованные и поданные в печать работы.

Опубликованные.

- 1 *К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел*, Математический сборник, стр. 41–50, 204:8, 2013.
- 2 *Shortest positive products of nonnegative matrices*, Linear Algebra and its Applications, pp.1627–1634, 439, 2013.

Готовящиеся.

Готовится совместная с В.Ю.Протасовым статья, посвященная полугруппам операторов с постоянным спектральным радиусом. Еще не дописана.

## 3. Участие в школах.

- 3-я Летняя школа по геометрическим методам математической физики, Московская область, 25.06-28.06;
- Summer School on Dynamical Systems, Poland, Gdynia, 08.07–17.07;
- Летняя школа 2013 лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне, Ярославль, 20.07 – 03.08.

## 4. Другое.

Учатсие в переводе книги Герберта Эдельсбруннера "Computational topology: an introduction". Выступал с докладом в МФТИ и на нескольких научных семинарах в МГУ.