Отчет по гранту фонда Династия за 2015 год

Войнов Андрей

1. Результаты, полученные в этом году

Основными темами, которые изучались в этом году, были:

- связь гипотезы Черни о синхронизируемых конечных автоматах с геометрией многогранников,
- многомерные уравнения самоподобия,
- вопросы об асимптотическом поведении цепей Маркова с неодномерным временем. Исследование велось совместно с В.Ю.Протасовым.

Перечислим основные результаты, полученные по каждой из тем.

Гипотеза Черни о синхронизируемых конечных автоматах является одним из основных открытых вопросов о раскрашенных графах и детерминированных конечных автоматах. Детерминированный конечный автомат представляет из себя конечное множество состояний $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ и набор отображений Σ, действующих на Q. Такой автомат называется *синхронизируемым*, если для некоторой композиции $\sigma = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_l}$ отображений из Σ образ $\sigma(Q)$ всех состояний состоит из единственного элемента. Таким образом, σ «синхронизирует» все состояния. Гипотеза Черни заключается в том, что если автомат (Q, Σ) – синхронизируем, то найдется синхронизирующее отображение $\sigma = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_l}$ длины l, не превосходящей $(n-1)^2$. На сегодняшний день гипотеза не доказана, и наилучшая оценка кубична по n.

Детерминированные конечные автоматы имеют простую геометрическую интерпретацию: с множеством $\{q_1, \ldots q_n\}$ состояний мы ассоциируем вершины $n{-}1$-мерного симплекса $\Delta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. С отображением $\sigma \in \Sigma$ мы ассоциируем аффинный оператор A_σ такой, что образ $A_\sigma(v_i)$ является вершиной, соответствующей состоянию $\sigma(q_i)$. Синхронизируемость означает наличие произведения операторов, переводящих симплекс в единственную вершину.

Предположим теперь, что операторы, действующие на симплексе Δ, не обязаны переводить вершину в вершину: требуется только, чтобы образ Δ лежал внутри Δ. Нас будет интересовать, насколько они могут сблизить вершины симплекса. Формально: задано конечное семейство аффинных операторов $\mathcal{A}$, каждый из которых переводит симплекс Δ в себя. Будем говорить, что семейство $\mathcal{A}$ *перемешивает* вершины симплекса, если для некоторого произведения A операторов семейства, образ каждой из вершин $Av_1, \ldots, Av_n$ может быть представлен в виде нетривиальной выпуклой комбинации фиксированной вершины w и некоторого поднабора других вершин. Таким образом, каждая из точек $Av_1, \ldots, Av_n$ должна находиться внутри грани, содержащей w (или во внутренности всего симплекса). Аналогичную конструкцию можно воспроизвести и для произвольного многогранника P и семейства аффинных операторов, переводящих P в себя. Как и в гипотезе Черни, нас интересуют произведения, «перемешивающие» вершины наиболее быстрым способом. Установлен ряд верхних оценок на кратчайшие перемешивающие произведения в терминах различных компонент f-вектора многогранника P.

Перейдем ко второй теме. Предположим, в пространстве $\mathbb{R}$ задано самоаффинное тело G с набором операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$, то есть такое выпуклое множество, что $G = \bigcup_{m=1}^{k} A_m G$ и элементы разбиения не имеют общих внуренних точек. Несколько работ автора из предыдущих отчетов посвящены геометрии таких множеств. Одной из основных мотивировок рассмотрения такого типа множеств заключается в том, что при помощи них удается построить самоподобные функции, определенные на многомерных областях. Предположим, что кроме того в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$ задано семейство аффинных операторов $\{B_1, \dots, B_k\}$. *Уравнением самоподобия* на функцию $f : G \to \mathbb{R}^n$ называется условие коммутативности следующих k диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle A_i} & & \downarrow{\scriptstyle B_i} \\ G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Неформально говоря, функция f должна переносить фрактальную структуру самоаффинного тела G в пространство $\mathbb{R}^n$ с операторами $B_1, \dots, B_k$. Самоподобные функции имеют множество приложений в геометрии, анализе и ряде других областей. Важным вопросом является наличие решения в различных функциональных пространствах. Ранее в работах автора и В.Ю.Протасова был построен критерий существования и единственности решения в пространстве $L_p(G, \mathbb{R}^n)$ при некоторых ограничениях на тело G. В этом году удалось распространить соответствующие результаты уже на произвольное самоаффинное тело G. При этом оказывается, что любое решение многомерного уравнения самоподобия может быть представлено как композиция универсального отображения $\psi : G \to [0, 1]$ и решения одномерного уравнения самоподобия.

Перейдем к третьей теме. Рассмотрим цепь Маркова с модификацией: вместо одного оператора перехода будем предполагать, что задана система стохастических линейных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$. В качестве начального значения такой цепи рассмотрим систему вероятностных векторов $x_{h_1,\dots,h_k}$, где $\sum_{i=1}^{k} h_i = 0$ – набор целых чисел. Таким образом, начальное состояние задается значениями на некотором подпространстве в $\mathbb{Z}^k$. Переход осуществляется по следующему правилу: $x_{h_1,\dots,h_k} = \sum_{i=1}^{k} A_i x_{h_1,\dots,h_i-1,\dots,h_k}$. В работах Форназини и Валкер были найдены алгебраические условия сходимости такого рода систем, а также был разработан подход с точки зрения теории матриц. Нами были рассмотрена связь данного сюжета с так называемыми k-примитивными матричными полугруппами. Получены новые результаты о сходимости, ее скорости и алгоритмической распознаваемости.

2. Опубликованные работы

- *Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов*
  (совместно с В.Ю.Протасовым), Матем.сборник, 206:7 (2015), 33–54.

3. Участие в конференциях

- The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry (Москва, МФТИ),

- 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (Москва, SkolTech),
- International conference on Wavelets and Applications (Санкт-Петербург, институт Эйлера).

4. Педагогическая деятельность и другое

Работаю ассистентом на кафедре общих проблем управления мех-мата МГУ, веду семинары по вариационному исчислению у одной группы.

Выступал на семинарах в ИППИ и МГУ. Рецензировал две статьи для Математического сборника.

Подведение итогов за 3 года

Среди объявленных направлений исследования были:

- **Полугруппы линейных операторов с постоянным спектральным радиусом.** По этой тематике исследование проводилось совместно с В.Ю.Протасовым. Были установлены связи полугрупп с постоянным спектральным радиусом с динамическими системами на сферах. Было показано, что всякая такая полугруппа обладает некоторым инвариантным многообразием, приведена явная конструкция. В целом, на большинство интересующих вопросов удалось получить ответ.

- **Уравнения самоподобия.** Удалось доказать теорему о существовании и единственности L_p-решений уравнения самоподобия в наиболее общем виде. Кроме того, была установлена связь между решениями над различными областями. По этой теме удалось доказать все, что планировалось.

- **Самоаффинные многогранники.** По этой теме получилось доказать ряд результатов, в том числе о связи самоаффинных тел с замощениями пространства. Тем не менее, остался нерешенным вопрос о явном описании всех самоаффинных тел. Остался открытым следующий вопрос: верно ли, что любое самоаффинное тело представляется как прямая сумма джоина некоторого набора многогранников и выпуклого тела?

Существенную часть работы заняло исследование полугрупп неотрицательных матриц. Исследование по этой теме было начато в 2012 году совместно с В.Ю.Протасовым. В совместной статье был найден критерий примитивности семейства неотрицательных матриц, т.е. наличия положительного произведения. Критерий был доказан с привлечением геометрии выпуклых многогранников. В той же статье был поставлен вопрос о комбинаторном доказательстве, который спустя некоторое время был независимо решен двумя группами математиков. При помощи аппарата, связанного с ограниченными полугруппами аффинных операторов, нам удалось найти аналитическое доказательство этого критерия. Кроме того, автор провел работу по оценке длины минимального положительного произведения матриц примитивного семейства, была найдена связь с гипотезой Черни.

Результаты, полученные автором за время получения гранта фонда «Династия», составили значительную часть кандидатской диссертации, защита которой запланирована на весну 2016 года.

Работы, вышедшие за все время получения гранта

1. *Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов* (совместно с В.Ю.Протасовым), Матем.сборник, 206:7 (2015), 33–54.

2. *К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел*, Матем.сборник, 204:8 (2013), 41–50.

3. *Shortest positive products of nonnegative matrices*, Linear Algebra and its Applications, 439 (2013), 1627–1634.

4. *Matrix semigroups with constant spectral radius* (preprint, 2014, with V.Yu.Protasov), arXiv:1407.6568.