Для фонда Дмитрия Зимина «Династия»
Отчет за 2014 год
Конкурс молодых математиков – подпрограмма 2.1

Зотов Андрей Владимирович

«Уравнения Пенлеве-Шлезингера,интегрируемые системы и конформные теории поля»

1. Результаты, полученные в этом году.

1.1. Был предложен метод вычисления спектра квантовой трансфер матрицы для обобщенной квантовой цепочки, включающей параметры неоднородности в каждом узле и параметры твистов матрицы монодромии. Оказалось, что ответ для такой квантовой задачи формулируется в терминах классической интегрируемой системы взаимодействующих частиц типа Русенаарса. Количество частиц в ней равно числу узлов в цепочке. При этом координаты частиц задаются параметрами неоднородности. Ранг матрицы монодромии вместе с твистами определяет набор собственных значений оператора Лакса - уровни интегралов движения для системы частиц. Спектр же квантовой задачи определятся по набору обобщенных скоростей частиц. Указанное сопоставление позволяет вычислять спектр цепочки через представление Лакса системы частиц. Такое соответствие между рациональной системой Русенаарса и изотропной (XXX) цепочкой было явно доказано в работе [2.1].

1.2. Предложена классификация изомонодромных задач на эллиптических кривых для связностей с простыми особенностями в G-расслоениях над проколотыми эллиптическими кривыми [2.2]. Сложность задачи состоит в учете расслоений с нетривиальными характеристическими классами, которые определяются элементами центра простой комплексной группы G. В такой постановке «список» изомонодромных задач определяется «списком» эллиптических интегрируемых систем. Он включает в себя уравнения Пенлеве, их многокомпонентные обобщения и эллиптические системы Шлезингера. Наличие нетривиальных характеристических классов позволяет, в частности, явно переписать уравнения Пенлеве в форме неавтономной динамики движения твердого тела - с времени-зависимым тензором инерции.

1.3. Была описана рациональная версия модификации расслоений над (вырожденной) эллиптической кривой [2.3]. Это позволило установить классический аналог IRF-Vertex соответствия (или симплектического соответствия Гекке) для рациональных интегрируемых систем. Стартуя с модели Калоджеро, был описан «рациональный волчок» - новая интегрируемая система движения твердого тела. Примечательной особенностью является вырожденность (в жордановом смысле) обратного тензора инерции. Явная форма модификации расслоения позволила вычислить представление Лакса и классическую r-матрицу, зависящие от спектрального параметра.

1.4. Предложен универсальный метод описания для интегрируемых волчков [2.4]. Представление Лакса со спектральным параметром строится простым способом по r-матрице. Два естественных случая – классической и квантовой r-матриц – отвечают классическому волчку с линейной скобкой Пуассона, и релятивистскому волчку с квадратичной скобкой соответственно. В последнем случае роль (обратной) скорости света выполняет постоянная Планка, входящая в квантовую r-матрицу. Данный класс моделей включает эллиптические, тригонометрические и рациональные случаи. Эти интегрируемые системы представляют собой простейший (классический) аналог моделей типа квантовых цепочек на одном узле. Иным образом их можно рассматривать как альтернативную форму записи систем типа спинового обобщения моделей Калоджеро и Русенаарса. Наличие такой интерпретации позволило явно вычислить рациональную квантовую r-матрицу, являющуюся нетривиальной деформацией R-матрицы Янга.

1.5. Описанный в [2.3,2.4] интегрируемые случай (рациональный волчок) использовался в [5] для построения более общих систем. Таких, как модели Годена, а также 1+1 солитонные уравнения. В частности, был описан (нетривиальный) рациональный аналог уравнения Ландау-Лифшица. В некотором пределе он воспроизводит хорошо известное уравнение Гейзенберга. Кроме того, была описана соответствующая деформация уравнения главного кирального поля и ее многополюсные обобщения.

1.6. В [2.6] было показано, что для некоторого класса квантовых r-матриц существует выделенная нормировка, в которой они удовлетворяют некоммутативным аналогам тождеств Фея. Эти тождества связывают r-матрицы при разных значениях спектрального параметра и постоянной Планка. Обычные (скалярные) тождества Фея имеют широкое применение в интегрируемых системах. Они лежат в основе существования пар Лакса со спектральным параметром для широкого круга моделей. Полученный в работе r-матричный вариант тождеств позволил получить многомерные обобщения для таких пар Лакса. Скалярный матричный элемент при этом заменяется на (квантовую) r-матрицу, а постоянная Планка играет роль спектрального параметра. Примечательно и то, что указанные тождества Фея позволяют «вывести» квантовые уравнения Янга-Бакстера, которые обычно постулируются как исходный принцип (или определение r-матрицы). Еще одно применение результата – описание класса уравнений Книжника-Замолодчикова-Бернара. Выполнение условия совместности для связностей КЗБ также гарантируется вышеуказанными тождествами.

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

2.1 A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, "Spectrum of quantum transfer matrices via classical many-body systems", *JHEP* **01** (2014) 070, 28 pp., arXiv: 1310.6958

2.2 A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, "Classification of isomonodromy problems on elliptic curves", *Russian Math. Surveys*, **69**:1 (2014), 35–118, arXiv: 1311.4498

2.3 G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, "Rational top and its classical r-matrix", *J. Phys. A*, **47**:30 (2014), 305207, 19 pp., arXiv: 1402.3189

2.4 A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Relativistic classical integrable tops and quantum R-matrices", *JHEP* **07** (2014) 012, arXiv: 1405.7523

2.5 A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Classical integrable systems and soliton equations related to eleven-vertex R-matrix", *Nucl. Phys. B*, **887** (2014), 400–422, arXiv: 1406.2995

2.6 A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, "Planck Constant as Spectral Parameter in Integrable Systems and KZB Equations", *JHEP* **10** (2014) 109, 29 pp., arXiv: 1408.6246

3. Участие в конференциях и школах.

3.1 Доклад "Постоянная Планка как спектральный параметр в интегрируемых системах", Семинар по математической физике, факультет математики НИУ ВШЭ, 19 ноября 2014 г.

3.2 Доклад "Квантовые R-матрицы в классических интегрируемых системах", семинар Отдела теоретической физики МИАН им. В.А. Стеклова РАН, 26 ноября 2014 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах.

5. Педагогическая деятельность.

5.1 Курс «Теория групп и представлений», Московский физико-технический институт, Факультет общей и прикладной физики, кафедра «Теоретическая астрофизика и квантовая теория поля», 2-ой курс, весенний семестр 2014 г.

5.2 Научное руководство: Б. Рунов (МФТИ, 6-ый курс), А.Кошелев (МИФИ, 4-ий курс).

5.3 Продолжена работа с аспирантами Г.Аминовым и С.Артамоновым. По результатам опубликован ряд совместных работ.

А.В. Зотов

03 декабря 2014 г.