

Краткое изложение заявки

“Исследование свойств слабо выпуклых множеств и уклонения выпуклой оболочки” Иванова Г.М.

Выпуклый анализ и теория двойственности, как известно, имеют решающее значение во многих вопросах фундаментальной и прикладной математики. Разнообразие приложений выпуклого анализа привело к изучению различных модификаций понятий выпуклости. Одной из целей данного проекта является изучение геометрических, топологических и аппроксимативных свойств слабо выпуклых множеств и функций в банаховых пространствах. Различные классы слабо выпуклых множеств рассматривались в работах Р. Рокафеллара, Ф. Кларка, Ж.-Ф. Виалья, Г.Е. Иванова, Л. Тибо и др.

В настоящее время нерешенными являются задачи о взаимосвязи паравыпуклости функций и слабой выпуклости их надграфиков в банаховых пространствах. Отметим, что имеющиеся результаты в гильбертовых пространствах позволяют эффективно строить приближения непрерывных функций слабо выпуклыми, обосновывать корректность (well-posedness) некоторых задач теории приближений, удалось получить критерий гладкости функции в терминах слабой выпуклости надграфиков, также решить ряд задач о существовании и построении селекторов многозначных отображений. В случае банаховых пространств есть ряд результатов, полученных при очень сильных ограничениях на пространство. В этих работах предполагается монотонность второго порядка для нормально-го конуса. Соискатель считает, что это условие неестественно в произвольном банаховом пространстве. Необходимо обобщить определения, возникшие при исследованиях в гильбертовом случае, и рассматривать монотонность того же порядка, что и порядок модуля гладкости пространства в нуле.

Планируется доказать, что

- нормальный конус к слабо выпуклому множеству обладает свойством монотонности с порядком равным порядку модуля гладкости пространства в нуле;
- в равномерно гладком и равномерно выпуклом банаховом пространстве из слабой выпуклости надграфика и подграфика некоторой функции следует ее паравыпуклость;

тем самым закрыть ряд открытых проблем. При работе с невыпуклыми, в частности слабо выпуклыми, множествами остро встает задача об оценке уклонения точки выпуклой оболочки множества от исходного множества. Для решения этой задачи соискатель ввел понятие УВО-модуля банахова пространства и получил ряд результатов по его оценке в различных пространствах. Были получены следующие результаты:

1. В случае конечномерных банаховых пространств получена неулучшаемая по размерности оценка на УВО-модуль.
2. В случае гильбертова пространства найдено точное значение УВО-модуля
3. Произведены оценки на величину УВО-модуля банахова пространства через известные характеристики, например, через модули гладкости и выпуклости пространства.

Одна из целей настоящего проекта – продолжить начатые исследования, в частности, доказать критерий гильбертовости в терминах УВО-модуля, получить оценки в случае пространств Лебега, и применить развиваемую технику для исследования топологических свойств покрытий выпуклых множеств шарами.