Оценки собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с действием групп

Михаил Карпухин

Проект посвящен спектральной геометрии или, более точно, оценкам на собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами. Спектр оператора Лапласа-Бельтрами — важный инвариант риманова многообразия, топологические и метрические свойства которого и планируется изучать в данном проекте. Исследование будет проводится в двух взаимосвязанных направлениях.

Изучение функционалов $\Lambda_1(M, g)$. Пусть (M, g) — замкнутое риманово многообразие размерности 2. Нормализованное собственное значение оператора Лапласа-Бельтрами $\Lambda_1(M, g) = \lambda_1(M, g)\,\mathrm{Area}(M)$ может рассматриваться как функционал на пространстве метрик на M. Янг и Яу доказали существование верхней оценки для этих функционалов, зависящей только от топологии M. Тем не менее, задача нахождения супремума этого функционала решена для очень ограниченного числа многообразий. В недавней работе автору проекта удалось доказать следующую теорему, решающую эту задачу для ориентированной поверхности рода 2.

Теорема 1. *Пусть Σ_2 обозначает ориентированную поверхность рода 2. Тогда $\sup_g \Lambda_1(\Sigma_2, g) = 16\pi$.*

Доказательство этой теоремы использует следующую общую идею. Пусть на M действует изометриями конечная (компактная) группа G. Тогда пространство функций $C^\infty M$ раскладывается в прямую сумму подпространств $C^\infty_\chi M$, соответствующих неприводимым представлениям χ группы G. Более того, эти подпространства инвариантны относительно оператора Лапласа, пусть $\lambda_{1,\chi}(M)$ — первое ненулевое собственное значение Δ, ограниченного на $C^\infty_\chi M$. Важный вопрос: как связаны между собой $\lambda_{1,\chi}(M)$ для разных χ? Например, доказательство теоремы 1 существенно опирается на следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ и свободного действия группы $\mathbb{Z}_2$ имеет место неравенство*

$$\lambda_{1,odd}(\mathbb{S}^2, g) < \lambda_{1,even}(\mathbb{S}^2, g),$$

где even — тривиальное представление, а odd — единственное нетривиальное.

В дальнейшем планируется продолжить изучение функционалов $\Lambda_1(M, g)$ в следующих направлениях.

1) Нахождение значения $\sup_g \Lambda_1(\Sigma_3, g)$, где Σ_3 — ориентированная поверхность рода 3. Это планируется сделать, получив обобщения утверждения 1 и применив их к квартике Клейна — поверхности рода 3 с наибольшей группой симметрий.

2) Получение ответа на вопрос: верно ли утверждение 1 на сферах размерности $\geqslant 3$?

3) Получение первых результатов для компактных групп. Более точно, пусть на M свободно действует изометриями $U(1)$. Можно ли утверждать, что $\lambda_{1,\bar{n}}(M, g) < \lambda_{1,\bar{m}}(M, g)$ как только $n < m$? Здесь n и m — натуральные числа, а $\bar{n}$ — представление $U(1)$, отправляющее α в поворот на угол $n\alpha$.

Задача Стеклова на поверхностях. Задача Стеклова является одним из вариантов постановки спектральной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с границей. Спектр этой задачи имеет множество свойств, схожих со свойствами спектра Лапласа на замкнутом многообразии. Как следствие, вопросы, возникающие здесь во многом схожи с вопросами, описанными выше. Пусть $\sigma(N, h)$ обозначает первый ненулевой элемент спектра Стеклова, обозначим $\Sigma(N, h) = \sigma(N, h)L(\partial N)$, где $L(\partial N)$ — длина границы N. Планируется продолжить изучение задачи Стеклова, в частности, в ближайшее время ожидается получение ответа на следующий вопрос.

4) Существует ли последовательность поверхностей с метрикой (N_n, h_n), такая что $\Sigma(N_n, h_n) \to \infty$ при $n \to \infty$? Планируется предъявить такую конструкцию многообразий (N_n, h_n), которая одинаково хорошо работает как для задачи Стеклова, так и для классического спектра оператора Лапласа.

В ближайшее время планируется также применить технику, разработанную при доказательстве теоремы 1, к спектру Стеклова. Это позволит получить поверхности положительного рода с большим значением $\Sigma(N, h)$, которые могут оказаться максимальными для этих функционалов. В общем, это направление исследований можно сформулировать следующим образом.

5) Что можно сказать о значении $\sup_h \Sigma(N, h)$ для поверхностей N положительного рода?