Заявка на участие в конкурсе фонда "Династия"для молодых математиков

Краткое изложение заявки

А.Д. Баранов

Канонические системы дифференциальных уравнений часто возникают в естественных науках. Они моделируют движение частицы под действием зависящего от времени потенциала в гамильтоновой механике и колебание струны с неравномерным распределением массы. Частными случаями канонических систем служат операторы Шредингера, система Дирака и матрицы Якоби.

Каноническая система с гамильтонианом H – это дифференциальное уравнение $y'(x) = zJH(x)y(x)$, $x \in [0, L)$, где H – функция, определенная на некотором (конечном или бесконечном) интервале $[0, L)$, значения которой – вещественные неотрицательные 2×2-матрицы, H локально интегрируема на $[0, L)$ и не обращается в нуль на множестве положительной меры, z – комплексный (спектральный) параметр, а J – матричная мнимая единица.

Спектральная теория канонических систем распадается на два принципиально различных случая в зависимости от роста гамильтониана H вблизи L – регулярный (случай предельной окружности Вейля) и сингулярный (случай предельной точки Вейля). Одним из крупнейших достижений спектральной теории дифференциальных операторов является следующая Обратная Спектральная Теорема де Бранжа. Она утверждает, что регулярные гамильтонианы находятся во взаимно-однозначном соответствии с некоторым классом пространств целых функций (пространств де Бранжа), а сингулярные гамильтонианы – во взаимно-однозначном соответствии с мерами на вещественной прямой с конечным интегралом Пуассона.

Первая часть заявки посвящена теории роста для пространств де Бранжа, возникающих в Обратной Спектральной Теореме для канонических систем. Эта часть заявки представляет собой совместный проект с Х. Ворачеком и Р.В. Романовым.

В приложениях принципиальную роль играет связь свойств пространств де Бранжа (спектральных мер) и свойств гамильтонианов. Однако, существует очень мало результатов о соответствии классов гамильтонианов и классов пространств де Бранжа. Классическим результатом в этом направлении является формула (полученная де Бранжем и М.Г. Крейном), позволяющая выразить экспоненциальный тип пространства $\mathcal{H}(E)$ через гамильтониан канонической системы. Согласно этой формуле, тип пространства (понимаемый как тип порождающей целой функции E) равен $\sigma(E) = \int_0^L \sqrt{\det H(x)}dx$. В приложениях этот результат позволяет, например, найти спектральную асимптотику для системы Дирака на интервале. Заметим, что описание типа возникающих пространств в терминах спектральной меры μ – это знаменитая задача о "типе меры" (недавно решенная А.Г. Полторацким).

В то же время, многие важные специальные классы канонических систем (уравнения Шредингера, нагруженные струны, матрицы Якоби) имеют минимальный тип, что делает естественным вопрос о порядке для таких систем. Задача проекта – построить теорию роста целых функций, возникающих при параметризации спектральных данных в теории де Бранжа, найти соответствие между классами пространств де Бранжа фиксированного роста и классами гамильтонианов. Важный частный случай задачи о порядке пространств целых функций, отвечающих каноническим системам, связан с вопросом об устойчивости характеристик роста при малых возмущениях гамильтониана или спектральной меры. В терминах спектральной меры результаты в этом направлении были получены Юдицким и Боричевым и Содиным для двух конкретных ситуаций – полиномиальной и экспоненциальной аппроксимации. Эти результаты планируется распространить на общий случай цепочек пространств де Бранжа и показать устойчивость порядка и типа участвующих целых функций при экспоненциально малых возмущениях меры.

Еще одна тема проекта – исследование регулярных гамильтонианов, отвечающих некоторому классу пространств де Бранжа со свойством локализации нулей. Эта часть заявки представляет собой совместный проект с Е. Абакумовым и Ю. Беловым.