Конкурс Фонда Дмитрия Зимина "Династия". План исследований Федорова Глеба Владимировича.

Основные направления исследований относятся к области аналитической и комбинаторной теории чисел. Главным предметом исследований является многомерная функция делителей с растущей размерностью. *Многомерной функцией делителей* $\tau_k(n)$ называется количество представлений натурального n в виде произведения k натуральных сомножителей. В случае $k = 2$ это количеству различных делителей натурального числа n. Число сомножителей k в представлении числа n называется ее *размерностью*. Проблема делителей допускает многочисленные наглядные арифметические и геометрические интерпретации. В частности, среднее значение количества делителей чисел из начального отрезка натурального ряда одновременно является количеством точек целочисленной решетки под гиперболой. В общем случае размерность многомерной функции делителей k отражает размерность пространства, в котором рассматривается соответствующая гиперболическая поверхность.

Проведенные исследования. Дано уточнение оценок К.К. Марджанишвили и Д.А. Митькина, равномерных по всем значениям размерности k, среднего значения многомерной функции делителей $D_k(x)$, а также среднего значения функции делителей, возведенных в фиксированную целую степень. Оказывается, что многочлены Лагерра и их линейные комбинации дают достаточно хорошее приближение к сумме значений многомерной функции делителей.

Обнаружен эффект деформации верхнего предела функции делителей с растущей размерностью. Оказывается, что максимальное значение (в смысле верхнего предела) функции делителей $\tau_k(n)$ отличатся от классического верхнего предела при достаточно быстром росте размерности k. Данный эффект отчасти объясняет обнаруженный в 2001 году эффект А.И. Павлова для среднего значения многомерной функции делителей с растущей размерностью: если размерность k растет достаточно быстро, то главный член асимптотической формулы для величины $D_k(x)$ отличается от ожидаемого главного члена.

Получены результаты, продолжающие исследования А.И. Павлова. Доказано, что главный член асимптотической формулы для среднего значения многомерной функции делителей деформируется множество раз и выделены два дополнительных промежутка деформации.

Проект будущих исследований. При растущей размерности (степени дзета-функции Римана) открытый А.И. Павловым эффект деформации главного члена асимптотической формулы для среднего значения многомерной функции делителей явно указывает на интересную особенность дзета-функции Римана — «размытие» полюса при возведении в достаточно большую степень (размерность функции делителей). В дальнейших исследованиях важную роль будут играть оценки дзета-функции в критической полосе и гипотеза Линделефа.

Планируется расширить границу для значений параметра k в задаче А.И. Павлова. Для этого требуется получение новых оценок для дзета-функции Римана, возведенной в достаточно большую степень, вблизи полюса. Отметим, что при $k \gg \ln x$ возникают другие эффекты, связанные с тем, что натуральное число n, не превосходящее x, не может иметь более $\log_2 x$ простых делителей. Это обстоятельство толкает нас использовать комбинаторный подход при больших значения размерности функции делителей. Особый интерес для исследования среднего и верхнего предельного значения функции $\tau_k(n)$ представляет пограничный случай, когда $k \asymp \log_2 n$.

В дальнейшем, разработанную технику планируется применить в случае растущей размерности k к более общим задачам с функцией делителей.