

Нестеров Павел Николаевич. Краткое изложение заявки

Планируемый проект посвящен разработке методов асимптотического интегрирования некоторых классов систем функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) при стремлении независимой переменной к бесконечности. Отличительной особенностью рассматриваемого класса систем является наличие среди коэффициентов системы колебательно убывающих функций.

Возможность коэффициентов, имеющих колебательно убывающую форму, оказывать качественное влияние на динамику системы известна уже давно. Первыми на этот факт обратили внимание научной общественности Вигнер и фон Нейман. Построенный ими колебательно убывающий потенциал (потенциал Вигнера–фон Неймана) доставляет пример одномерного оператора Шредингера, у которого существует положительное собственное значение. Динамические системы, которые в определенном смысле стремятся к автономным при стремлении независимой переменной к бесконечности, называют обычно асимптотически автономными. Основы теории асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений были заложены в работах Л. Маркуса. Несмотря на то что поведение решений такого рода систем определяется некоторыми свойствами предельной автономной системы, в целом ряде задач наличие убывающих коэффициентов может оказывать качественное влияние на динамику системы.

Работы автора проекта посвящены разработке методов построения асимптотики решений асимптотически линейных динамических систем. Рассматриваемые в этих работах динамические системы либо являются линейными изначально, либо в некотором смысле стремятся к линейным при стремлении независимой переменной к бесконечности. Автором предложен метод асимптотического интегрирования в окрестности бесконечности систем линейных ОДУ, а также некоторых классов систем линейных ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Суть метода сводится к использованию идеологии метода усреднения Крылова–Боголюбова в сочетании с классическими асимптотическими теоремами (типа теоремы Н. Левинсона). Применительно к нелинейным системам ОДУ сформулирован и доказан аналог второй теоремы Н.Н. Боголюбова для так называемых систем с исчезающей на бесконечности главной частью. С помощью предложенной методики был изучен ряд прикладных задач. Отметим некоторые из них: одномерное уравнение Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом, система связанных осцилляторов с медленно убывающей связью, неавтономный осциллятор Ван дер Поля, различного вида адиабатические осцилляторы. Вычисление асимптотики решений адиабатических осцилляторов позволяет также изучить спектральные свойства оператора Шредингера с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Автором также была изучена спектральная задача для одномерного оператора Дирака с матричным потенциалом, элементами которого являются колебательно убывающие функции. Найдены те точки действительной оси, в которых у одномерного оператора Дирака могут возникать вложенные собственные значения. Наряду с задачами, описываемыми системами дифференциальных уравнений, были изучены также различные дискретные задачи. Использование дискретного аналога теоремы Левинсона, так называемой теоремы Бензаида–Латса, в сочетании с дискретным аналогом метода усредняющих замен позволило существенно упростить асимптотический анализ ряда разностных систем, содержащих осциллирующие величины.

В ходе научного исследования планируется разработать новые методы асимптотического интегрирования систем ФДУ, как линейных, так и нелинейных, содержащих колебательно убывающие коэффициенты. В проекте будет развит метод центральных многообразий для решения задачи асимптотического интегрирования в окрестности бесконечности. В частности, будут: сформулирована и доказана теорема о существовании у рассматриваемых систем ФДУ многообразия типа центрального при определенных предположениях о расположении корней квазиполинома, построенного по «предельной» системе; разработана схема построения указанного многообразия, а также обоснована разрешимость возникающих по ходу применения этой процедуры вспомогательных алгебраических задач; обоснован результат о свойстве глобального притяжения данного многообразия; описана процедура редукции исходной системы ФДУ на указанное многообразие и описан метод получения асимптотических формул для решений редуцированной системы. С помощью разработанной методики будут построены асимптотики решений некоторых систем ФДУ. Еще одно направление планируемых исследований связано с построением теории усреднения на бесконечном промежутке для нелинейных систем ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами.