

Заявка на конкурс фонда “Династия”

Д. А. Шабанов. Краткое изложение

На конкурс выдвигается проект исследования по экстремальным комбинаторным проблемам теории гиперграфов. Напомним, что *гиперграфом* $H = (V, E)$ называется совокупность различных подмножеств E , *ребер*, конечного множества V (множества *вершин гиперграфа*). *Хроматическим числом* гиперграфа называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски (все ребра неодноразноцветны) множества вершин. Гиперграф называется n -однородным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Экстремальные задачи о раскрасках гиперграфов были инициированы классическими теоремами теории Рамсея, в первую очередь — теоремами Рамсея и Ван дер Вардена. В общем виде исследуемый класс проблем может быть сформулирован так: *найти минимально возможное значение некоторой простой характеристики (число ребер, максимальная степень вершины и т.п.) n -однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r и, возможно, дополнительными свойствами (нет коротких циклов, мощности пересечения ребер ограничены и т.п.)*. Нижние оценки в таких задачах позволяют получить легко проверяемые условия существования правильных r -раскрасок у гиперграфов из разных классов.

В ранее проведенных исследованиях автором заявки были получены результаты в классических задачах о раскрасках гиперграфов: в проблеме Эрдеша–Хайнала (исследуется число ребер, нет дополнительных условий на гиперграф), в проблеме Эрдеша–Ловаса (исследуется число ребер, гиперграфы простые — каждые два ребра имеют не более одной общей вершины). Были получены разнообразные нижние оценки максимальной степени вершины в разных классах гиперграфов с большим хроматическим числом (простые гиперграфы, частичные системы Штейнера, гиперграфы с большим обхватом). В качестве приложения были получены нижние оценки функции Ван дер Вардена $W(n, r)$, наименьшего такого числа, что для каждого $N \geq W(n, r)$ в произвольной раскраске начального отрезка натурального ряда $\{1, \dots, N\}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n .

В предполагаемом исследовании планируется изучение следующих экстремальных задач о раскрасках гиперграфов. Первое направление связано с известной теоремой Хайнала–Семереди. Базовым утверждением теории раскрасок графов является тот факт, что хроматическое число любого графа с максимальной степенью d не превосходит $d + 1$. В 1970 году Хайнал и Семереди доказали, что в тех же самых условиях у графа существует еще и справедливая раскраска в $d + 1$ цвет. Раскраска вершин графа (или гиперграфа) называется *справедливой*, если она правильная и мощности любых двух цветовых классов отличаются не более чем на единицу. Таким образом, существование справедливой раскраски в r цветов означает, что граф можно разбить не просто на r независимых множеств, а на r независимых множеств почти одинакового размера. В проекте планируется получать теоремы типа Хайнала–Семереди для разных классов однородных гиперграфов, т.е. доказывать достаточные условия существования справедливых r -раскрасок в терминах ограничений на максимальную степень вершины.

Второе направление — это изучение проблемы Эрдеша–Ловаса о раскрасках неоднородных гиперграфов. Здесь предполагается получить результаты о существовании правильных r -раскрасок в терминах ограничения на функцию $f(H) = \sum_{e \in E} 2^{-|e|}$, где гиперграф $H = (V, E)$ имеет минимальную мощность ребра равную n .

Третье основное направление предполагаемых исследований связано с изучением гиперграфов с большим обхватом. Планируется получить асимптотические нижние оценки минимального возможного числа ребер n -однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r и обхватом (длиной минимального цикла) больше s .