Краткое изложение заявки А.А. Шлапунова по теме «Полнота корневых функций некоэрцитивных смешанных задач для операторов эллиптических с параметром в весовых пространствах Соболева-Слободецкого над негладкими областями»

Рассмотрим (вообще говоря, некоэрцитивную) смешанную задачу в ограниченной области евклидова n-мерного пространства для эллиптического с параметром дифференциального оператора $A(\lambda)$. Предполагается, что оператор имеет второй порядок и записан в дивергентной форме в области, а граничный оператор B имеет робиновский тип. Параметр λ, принадлежащий лучу Γ на комплексной плоскости, входит в символ оператора $A(\lambda)$ как дополнительная ко-переменная. Граница области является липшицевой поверхностью. Выделяется замкнутое подмножество Y на границе области для того, чтобы контролировать рост решений вблизи Y. Я планирую доказать, что:

1) пара $(A(\lambda), B)$ порождает голоморфное (относительно λ) семейство фредгольмовых операторов $L(\lambda)$ в подходящих весовых пространствах Соболевского типа, ассоциированных с сингулярным множеством Y; 2) элементы этого семейства непрерывно обратимы для всех λ на Γ, достаточно больших по модулю; 3) полнота корневых функций справедлива для семейства $L(\lambda)$ для операторов с медленно меняющимися коэффициентами.

Чтобы исследовать полноту корневых элементов в пространствах Соболевского типа, предлагается использовать классический подход с (возможно, некоэрцитивными) неотрицательными формами, метод Келдыша слабых возмущений самосопряженных операторов и метод лучей медленного роста резольвенты. Использование некоэрцитивных форм расширяет класс тех граничных условий, при которых корневые функции смешанной задачи полны в пространствах Соболева. Это позволяет варьировать граничные условия с помощью касательных векторных полей. Возможна потеря регулярности решений вблизи границы, но эта потеря мотивирована самой природой таких задач.

Я также планирую исследования в следующих направлениях:

4) полнота для областей с каспидальными особенностями; 5) распространение результатов на сильно эллиптические системы с главной частью типа обобщенного Лапласиана; 6) приложения к вопросу о регуляризации некорректной задачи Коши для эллиптических систем; 7) приложения к параболическим смешанным задачам (существование и единственность) в пространствах Соболева над цилиндрическими областями с начальными данными и некоэрцитивными граничными условиями робиновского типа на боковой поверхности цилиндра; 8) смешанную задачу для уравнений Навье-Стокса для сжимающейся жидкости в цилиндрических областях, имея в виду, что в этом случае параболическая система типа Ламе есть линеаризация системы уравнений Навье-Стокса.

Эти предложения базируются на моих предыдущих исследованиях:

а) результаты о полноте были доказаны (совместно с проф. Н. Тархановым и моим студентом А. Полковниковым) для корневых функций некоэрцитивной смешанной задачи в весовых пространствах Соболева в 2012-2013;

б) различные процедуры регуляризации задачи Коши для эллиптических систем были предложены и реализованы (совместно с Н. Тархановым) в 1992-2005. Они также были реализованы для дифференциальных эллиптических комплексов (с моими студентами Д. Федченко, И. Шестаковым) в 2011-2013.

в) краевые задачи для параболических уравнений (условия разрешимости, регуляризация) я изучал (совместно с моим студентом Р. Пузыревым) в 2012.