

Квантовый хаос, периодические орбиты и дзета-функция Римана

Основной целью настоящего проекта является установление новых связей между классическими хаотическими системами, их квантовыми аналогами и, далее, с дзета-функцией Римана.

Квантовый хаос можно определить как направление исследований по изучению динамики квантовых систем, являющихся хаотическими в классическом пределе.

Одним из важнейших вопросов теории квантового хаоса является установление соответствия между распределением собственных значений оператора Гамильтона, задающего квантовую динамику, и классическими неустойчивыми периодическими орбитами. Это соответствие даётся формулами следа Сельберга и Гутцвиллера. Однако формула Гутцвиллера имеет строгое математическое обоснование только для динамических систем во всём \mathbb{R}^n . В проекте предполагается математическое обоснование этой формулы для хаотической динамики в ограниченных областях, в частности, для хаотических бильярдов.

Явление квантового хаоса оказалось тесно связано с распределением нетривиальных нулей дзета-функции Римана (Монтгомери, 1973 г., Одлышко, 1987 г.). Одним из подходов к известной проблеме о нулях дзета-функции был предложен Гильбертом и По́йа. Согласно их гипотезе, нетривиальные нули дзета-функции соответствуют собственным значениям некоторого самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве. В 1986 г. Берри предположил, что этот самосопряжённый оператор может являться оператором Гамильтона квантовой системы, которая соответствует классической хаотической системе. Позже Конн, а также Берри и Китинг предложили гамильтонианы, у которых первые два ведущих члена в распределении собственных значений в квазиклассическом пределе совпадают с соответствующими членами распределения нетривиальных нулей дзета-функции (даваемыми формулой Римана–Мангольдта). В проекте предполагается подойти к этому вопросу с другой стороны: исследовать характер квантовой (а в пределе — и классической) динамики, которая может порождаться искомым гипотетическим гамильтонианом, воспользовавшись теоремами о распределении нетривиальных нулей дзета-функции и квазиклассическим пределом больших времён.

Другим интересным явлением, связанным с квантовым хаосом, являются «шрамы собственных функций». С помощью численных методов было установлено (Хеллер, 1984 г.), что собственные функции квантовых хаотических гамильтонианов (например, квантовых аналогов рассеивающих бильярдов), отвечающие большим собственным числам, имеют повышенные значения в окрестностях классических периодических орбит. Т.е. квантовая динамика как бы показывает, где бы проходила соответствующая классическая периодическая орбита. Однако до сих пор этот факт не только строго не обоснован, но даже и не сформулирован математически. В проекте предполагается математическое обоснование этого явления.

Основными инструментами исследования будут асимптотические методы, методы аналитической теории чисел, метод разложения квадратично интегрируемых функций по когерентным состояниям (функциям из специального семейства). В квазиклассическом пределе динамика когерентных состояний совпадает с классическими траекториями, поэтому такой подход представляется перспективным для установления соответствия между квантовой динамикой и классическими траекториями.

Также предполагается использовать метод квазиклассического предела больших времён, предложенный соискателем ранее. В этом пределе постоянная Планка стремится к нулю, а время — к бесконечности. Таким образом время перемасштабируется нужным образом, что позволяет аналитически исследовать динамику квантовой системы на произвольном масштабе времени. Этот метод может оказаться плодотворным при исследовании указанных задач.