# Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи на собственные значения для системы уравнений Максвелла

Система дифференциальных уравнений описывающая нелинейное волноводное распространение в слое $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -h < x < h\}$ связанной волны на двух различных частотах $\omega_E$ и $\omega_M$ и с двумя различными постоянными распространения $\gamma_E$ и $\gamma_M$ (это и есть пара спектральных параметров) следует из уравнений Максвелла и имеет вид[1]

$$\begin{cases} \gamma_M(\gamma_M X - Z') = \varepsilon X, \\ \gamma_E^2 Y - Y'' = \tau\varepsilon Y, \\ \gamma_M X' - Z'' = \varepsilon Z, \end{cases} \quad \text{где} \quad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_3, & x > h \\ \varepsilon_2 + \alpha(X^2+Y^2+Z^2), & -h < x < h \\ \varepsilon_1, & -h > x \end{cases} \tag{1}$$

и $X \equiv X(x)$, $Y \equiv Y(x)$, $Z \equiv Z(x)$; $\tau := \omega_E^2\omega_M^{-2}$; $\operatorname{Im}\gamma_E = \operatorname{Im}\gamma_M = 0$; $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \geqslant \varepsilon_0$; $\varepsilon_2$ и $\alpha$ – произвольные вещественные постоянные. Справедливы следующие условия сопряжения (следствие из электродинамики) $[Z' - \gamma_M X]|_{x=-h} = 0$, $[Y]|_{x=-h} = 0$, $[Y']|_{x=-h} = 0$, $[Z]|_{x=-h} = 0$, $[Z' - \gamma_M X]|_{x=h} = 0$, $[Y]|_{x=h} = 0$, $[Y']|_{x=h} = 0$, $[Z]|_{x=h} = 0$, где $[f(x)]|_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

**Теорема 1.** *Пусть $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$, тогда существует $\alpha_0 > 0$, такое, что для всякого $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ существует по крайней мере $l_E \cdot l_M$ изолированных пар собственных значений $\left(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]}\right) \in \left(\sqrt{\max(\tau\varepsilon_1, \tau\varepsilon_3)}, \sqrt{\tau\varepsilon_2}\right) \times \left(\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}, \sqrt{\varepsilon_2}\right)$, $i = \overline{1, l_E}$, $j = \overline{1, l_M}$*[2].

Однопараметрические задачи на собственные значения, о которых идет речь в названии проекта, являются частным случаем более сложных двухпараметрических задач.

Исследуемые задачи как однопараметрические, так и двухпараметрические могут быть поставлены в каждой из указанных областей (плоский слой; цилиндр; область, лежащая между двумя соосными цилиндрами) с тремя типами (физически разумных) условий: **(1)** условия сопряжения (уравнения Максвелла решаются во всем пространстве, а затем решения склеиваются на каждой из границ раздела сред с учетом условий непрерывности касательных компонент полей, на бесконечности требуется выполнения условия излучения), физически такие условия соответствуют выделению собственных колебаний поля вдоль плоского диэлектрика, которые затухают при удалении от границ области; **(2)** однородные краевые условия, а именно $u_\tau$ обращаются в нуль на границах раздела сред, где индекс $\tau$ обозначает взятие касательной компоненты электрического поля (такие условия соответствуют собственным колебаниям поля внутри диэлектрика, экранированного металлом). В этом случае уравнения Максвелла решаются только внутри рассматриваемой области; **(3)** комбинация условий сопряжения (на одной из границ области) и однородный краевых условий (на второй границе)[3]. В этом случае уравнения Максвелла как внутри рассматриваемой области, так и в одной из областей вне рассматриваемой области; затем полученные решения склеиваются на одной из границ с учетом условий непрерывности касательных компонент полей, на бесконечности требуется выполнения условия излучения, а на второй границе используют однородные краевые условия **(2)** (физически поставленные условия соответствуют собственным колебаниям электромагнитного поля в диэлектрике, экранированном с одной стороны металлом).

К настоящему моменту в одно- и двухпараметрических задачах с условиями типа **(1)** удалось доказать существование изолированных собственных значений (для однопараметрических задач) и изолированных пар собственных значений (для двухпараметрических задач).

В предлагающемся проекте планируется сделать следующее: изучить возникающие в электродинамике нелинейных волноведущих систем одно- и двухпараметрические задачи на собственные значения с условиями типа **(2)** и **(3)**, а именно **(a)** получить результаты аналогичные теореме 1 (в т.ч. и для более сложных нелинейностей, имеющих важное значение в электродинамике волноведущих структур с нелинейными средами); **(b)** получить результаты о связи номера собственного значения (номеров парных собственных значений) с количеством нулей собственной функции (собственных функций); **(c)** получить результаты о распределении нулей собственных функций.

---

[1] Нелинейность вида $\alpha u^2$ является одной из наиболее важных в электродинамике нелинейных сред. В рассматриваемых задачах как только выбрана модель нелинейности все уравнения являются строгим следствием из времязависимой системы уравнений Максвелла.

[2] Более точную формулировку этой теоремы, в частности определение чисел $l_E$ и $l_M$, более тонкие результаты о локализации пар собственных значений, а также все необходимые оценки, полученные через нормы соответствующих операторов, см. в [1–2] из списка публикаций.

[3] Условия типа **(3)** могут быть поставлены только для областей, граница которых имеет две компоненты связности, например, плоский слой или область, лежащая между двумя соосными цилиндрами.