Протасов Владимир Юрьевич

Линейные системы с переключениями: критерии устойчивости и приложения

Краткое изложение заявки

Для данного компактного множества $\mathcal{A}$ линейных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$, рассматривается разностное уравнение на последовательность векторов $\{x_i\}_{i\geq 0} \subset \mathbb{R}^d$:

$$x_k \;=\; A(k)\, x_{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

в котором все операторы $A(k)$ принадлежат $\mathcal{A}$. Каждой функции $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ и каждому начальному вектору $x_0 \in \mathbb{R}^d$ соответствует свое разностное уравнение. Совокупность таких уравнений для всевозможных функций $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ называется *дискретной линейной системой с переключениями* (discrete linear switching system), а решение $\{x_k\}$ любого из уравнений – траекторией системы. Система *устойчива*, если все её траектории стремятся к нулю при $k \to \infty$, при любом выборе операторов $A(k)$. Аналогично определяется устойчивость *непрерывной линейной системы с переключениями*: $\dot{x}(t) \,=\, A(t)\, x(t)\,,\ A(t) \in \mathcal{A}\,,\ t \geq 0\,$, где $A(\cdot)$ – измеримая функция со значениями в $\mathcal{A}$. Такие системы активно изучались, начиная с 1980-х гг., в российской (Молчанов, Пятницкий, Опойцев, Барабанов, Козякин, и др.) и в зарубежной литературе (Либерзон, Гурвиц, Бланкини, Шортен, Маргалиот, и др.) Они нашли многочисленные приложения, как инженерные, так и теоретические (динамические системы, управление, теория графов, проблема консенсуса, и т.д.) Основная задача: по заданному семейству $\mathcal{A}$ определить, будет ли система устойчивой, и построить для нее функцию Ляпунова.

Представленный проект содержит широкий круг задач, главные из которых: 1) построение эффективных критериев устойчивости дискретных и непрерывных систем, а также других типов устойчивости (с вероятностью 1, стабилизируемости, и т.д.); 2) приложения к задачам теории функций, комбинаторики, теории чисел и т.д.

Известно, что дискретная система устойчива тогда и только тогда когда $\rho(\mathcal{A}) < 1$, где $\rho(\mathcal{A}) = \lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{A(i)\in\mathcal{A}, i=1,\ldots,k} \|A(k)\cdots A(1)\|^{1/k}$ – *совместный спектральный радиус* семейства $\mathcal{A}$. Однако, вычисление $\rho(\mathcal{A})$ – сложная задача. Разработанные в литературе алгоритмы либо пригодны к малым размерностям d, либо дают слишком грубые оценки. В 2013 г. в совместной работе Н.Гуглиелми мы представили геометрический метод, который дает хорошие оценки (а в абсолютном большинстве практических случаев находит точное значение $\rho(\mathcal{A})$) в достаточно высоких размерностях. Это позволило доказать устойчивость дискретных систем, которые не поддавались ранее другим методам, а также решить несколько открытых проблем теории всплесков (гладкость всплесков Добеши высоких порядков), комбинаторики (асимптотика числа неперекрывающихся бинарных слов данной длины), и теории чисел (асимптотика бинарной функции разбиения). Мы планируем обобщить этот метод на непрерывные системы. Для этого нужно, в частности, уметь эффективно оценивать длину шага дискретизации непрерывной системы. В совместной работе с Р.Юнгерсом эта задача решена в частном случае, когда у всех операторов семейства $\mathcal{A}$ действительный спектр. Решение использует неравенства типа Маркова-Бернштейна для полиномов по системам экспонент. Мы предполагаем получить решение в общем случае. Для исследования устойчивости положительных систем с вероятностью 1 (стремление к нулю почти всех траекторий) нами разработан новый алгоритм вычисления показателя Ляпунова неотрицательных матриц, усилен ряд утверждений теоремы В.Оселедца для этого случая, а также доказана гипотеза Ж.Коэна для неотрицательных матриц. Я надеюсь усовершенствовать полученный алгоритм, используя современные методы выпуклой оптимизации.

Планируется применить полученные результаты к приложениям: задаче о емкости двоичных кодов (дискретная математика), о локальной гладкости известных всплеск-функций (действительный анализ), об асимптотике обобщенной функции разбиения Эйлера (теория чисел), и о примитивности семейств неотрицательных матриц.