Отчёт по гранту фонда «Династия» за 2014 год

Авдеев Роман Сергеевич

1. Результаты, полученные в 2014 году

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ нулевой характеристики, а X — некоторое G-многообразие (то есть алгебраическое многообразие, снабжённое регулярным действием группы G). Действие группы G на X (а также само X) называется *сферическим*, если X неприводимо и содержит открытую (а значит, плотную) орбиту для индуцированного действия борелевской подгруппы $B \subset G$. Если G — тор, то сферические G-многообразия принято называть *торическими*. В 2014 году исследования велись в трёх независимых направлениях, связанных с различными аспектами теории сферических многообразий.

1.1. Сферические действия на многообразиях флагов. *Обобщённым многообразием флагов* (или просто *многообразием флагов*) называется всякое однородное пространство вида G/P, где G — связная редуктивная алгебраическая группа, а P — её параболическая подгруппа. Все многообразия флагов фиксированной группы G суть в точности все её полные (а также все проективные) однородные пространства. В силу разложения Брюа всякое многообразие флагов G/P является сферическим относительно естественного действия группы G левыми сдвигами. В этой связи возникает следующий вопрос: а какие есть собственные связные редуктивные подгруппы в G, действующие на G/P сферично? Получению ответа на этот вопрос посвящена наша совместная деятельность с А. Петуховым. Более точно, решается следующая задача: для каждой фиксированной связной редуктивной группы G перечислить все пары (X, K), где X — многообразие флагов группы G и K — её связная редуктивная подгруппа, для которых K действует сферично на X. В 2014 году была сдана в печать и опубликована первая работа на эту тему (см. [1]), в которой изложена общая стратегия классификации для произвольной группы G и разобран случай $G = \mathrm{GL}_n$. Наша ближайшая цель — получить аналогичную классификацию для случаев $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ и $G = \mathrm{SO}_n$.

1.2. Изучение пространства модулей аффинных сферических многообразий с заданной полугруппой старших весов. Согласно известному результату Винберга и Кимельфельда 1978 года, неприводимое аффинное G-многообразие является сферическим тогда и только тогда, когда естественное представление группы G в пространстве $\Bbbk[X]$ регулярных функций на X имеет *простой спектр*, то есть всякое неприводимое представление группы G входит в $\Bbbk[X]$ с кратностью не выше 1. Важнейшим инвариантом аффинного сферического G-многообразия X является его *полугруппа старших весов* Γ_X, состоящая из тех доминантных весов группы G, для которых $\Bbbk[X]$ содержит неприводимое представление группы G со старшим весом λ.

Пусть X — аффинное сферическое G-многообразие. Для каждого $\lambda \in \Gamma_X$ обозначим через $\Bbbk[X]_\lambda$ подпространство в $\Bbbk[X]$, в котором реализуется неприводимое представление группы G со старшим весом λ. Обозначим через R_X полугруппу, порождённую всеми элементами вида $\lambda + \mu - \nu$, для которых $\Bbbk[X]_\lambda \cdot \Bbbk[X]_\mu \supset \Bbbk[X]_\nu$. Полугруппа R_X называется *корневой полугруппой* многообразия X. В 1996 году Кноп доказал, что насыщение R_X^{sat} полугруппы R_X (то есть полугруппа, равная пересечению группы, порождённой R_X, и выпуклого конуса, порождённого R_X) свободно. Обозначим через Σ_X (конечный) базис полугруппы R_X^{sat}.

Пусть Γ — произвольная подполугруппа полугруппы старших весов группы G. Зафиксируем максимальный тор $T \subset G$ и обозначим через T_{ad} соответствующий *присоединённый тор*, то есть фактор тора T по центру группы G. В 2005 году Алексеев и Брион построили аффинную схему M_Γ конечного типа над $\Bbbk$ и снабдили её действием группы T_{ad} таким образом, что T_{ad}-орбиты в M_Γ находятся в биекции с аффинными сферическими G-многообразиями (рассматриваемыми с точностью до G-эквивариантного изоморфизма) с полугруппой старших весов Γ. Также они доказали следующие свойства M_Γ:

(1) M_Γ содержит лишь конечное число T_{ad}-орбит;

(2) M_Γ содержит единственную T_{ad}-неподвижную точку (обозначим её через X_0);

(3) для каждого аффинного сферического G-многообразия X с условием $\Gamma_X = \Gamma$, рассматриваемого как замкнутая точка в M_Γ, замыкание в M_Γ орбиты $T_{\mathrm{ad}} \cdot X$ является аффинным торическим T_{ad}-многообразием с полугруппой старших весов R_X.

Свойство (1) означает, что имеется лишь конечное число (с точностью до G-эквивариантного изоморфизма) аффинных сферических G-многообразий X с условием $\Gamma_X = \Gamma$. В 2009 году Лосев показал, что всякое такое многообразие X однозначно определяется множеством Σ_X. Свойство (3) гарантирует, что нормализация замыкания произвольной T_{ad}-орбиты в M_Γ является аффинным пространством.

В нашей совместной работе [2] со С. Кюпи́т-Футу́ (S. Cupit-Foutou) изучается пространство M_Γ в предположении, что Γ *насыщенна* (то есть является пересечением некоторой решётки с некоторым конечно порождённым выпуклым конусом). На геометрическом языке условие насыщенности Γ означает, что всякое аффинное сферическое G-многообразие с $\Gamma_X = \Gamma$ является нормальным. Используя известную комбинаторную классификацию сферических однородных пространств (Луна, Брави, Пеццини, Лосев, Кюпит-Футу, завершена недавно), а также их аффинных нормальных вложений (Кноп, 1991 год), мы получили комбинаторное описание всех возможных множеств Σ, для которых существует аффинное сферическое G-многообразие с $\Gamma_X = \Gamma$ и $\Sigma_X = \Sigma$. Благодаря этому описанию, мы смогли явно вычислить структуру T_{ad}-модуля касательного пространства к M_Γ в точке X_0. Из полученных результатов следует, что:

(1) для всякого нормального аффинного сферического G-многообразия X корневая полугруппа R_X совпадает с R_X^{sat} и тем самым свободна;

(2) замыкания всех T_{ad}-орбит в M_Γ (и, в частности, всех неприводимых компонент M_Γ) являются аффинными пространствами.

1.3. Вычисление сферических корней сферических подгрупп. Одним из важнейших инвариантов сферического однородного пространства G/H является набор $\Sigma_{G/H}$ его *сферических корней*. Представляет безусловный интерес вычисление этого инварианта исходя из явного вида подгруппы H. Более точно, предположим, что H стандартно вложена в некоторую параболическую подгруппу $P \subset G$, то есть зафиксированы такие разложения Леви $P = L \leftthreetimes P^u$ и $H = K \leftthreetimes H^u$, что $K \subset L$ и $H^u \subset P^u$ (этого всегда можно добиться, заменяя группу H сопряжённой). В этой ситуации хотелось бы найти эффективный метод вычисления набора $\Sigma_{G/H}$ исходя из пары $(K, \mathfrak{h}^u)$. В силу известного результата

Бриона и Пауэра 1987 года, выпуклый конус, порождённый множеством $\Sigma_{G/H}$, не меняется при переходе от подгруппы H к её нормализатору в G, ввиду чего достаточно найти метод вычисления сферических корней для подгрупп H, совпадающих со своим нормализатором. Если же H совпадает со своим нормализатором, то, как доказал Кноп в 1996 году, однородное пространство G/H обладает так называемой *чудесной компактификацией* X. Благодаря результатам Бриона (1990) и Лосева (2009), эта компактификация допускает следующую простую реализацию: X изоморфна замыканию орбиты точки $\mathfrak{h}$ в грассманиане $\mathrm{Gr}_{\dim\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ подпространств алгебры $\mathfrak{g}$ размерности $\dim\mathfrak{h}$. Известно, что G-орбиты в X находятся в биекции с подмножествами множества $\Sigma_{G/H}$, при этом выполнены следующие свойства:

(1) если O — G-орбита в X, соответствующая подмножеству $\Sigma \subset \Sigma_{G/H}$, то $\Sigma_O = \Sigma$;

(2) если O_1, O_2 — две G-орбиты в X, то O_1 содержится в замыкании O_2 тогда и только тогда, когда $\Sigma_{O_1} \subset \Sigma_{O_2}$.

В 2014 году автором разрабатывался метод *вырождения* подалгебры $\mathfrak{h}$, суть которого заключается в следующем: предел $\mathfrak{h}_0$ алгебры $\mathfrak{h}$ (рассматриваемой как точка в $\mathrm{Gr}_{\dim\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$) при действии правильно подобранной однопараметрической подгруппы в G принадлежит G-орбите в X меньшей размерности, при этом алгебра $\mathfrak{h}_0$ устроена проще. Рассмотрев несколько различных вырождений алгебры $\mathfrak{h}$ такого рода, можно свести задачу вычисления $\Sigma_{G/H}$ к той же задаче для некоторого конечного набора подалгебр, устроенных проще. Многократное повторение этой процедуры приводит в итоге к конечному числу *примитивных* случаев, для которых множество сферических корней известно.

Если H содержится в некоторой борелевской подгруппе B группы G, то множество $\Sigma_{G/H}$ известно априори, и в этой ситуации автору удалось найти явный вид вырождений, реализующих описанную выше идеологию. Следующий по сложности случай, естественно обобщающий ситуацию $H \subset B$, представляют собой сферические подгруппы H, для которых подгруппа K лежит между группой L и её коммутантом. Для этого случая получены некоторые частичные результаты. Эти исследования планируется продолжить в следующем году.

2. Публикации в 2014 году

[1] Р. С. Авдеев, А. В. Петухов, *Сферические действия на многообразиях флагов*, Математический сборник, **205**:9 (2014), 3–48; англ. пер.: R. S. Avdeev, A. V. Petukhov, *Spherical actions on flag varieties*, Sbornik: Mathematics, **205** (2014), no. 9, 1223–1263;

ArXiv: `1401.1777 [math.AG]`

[2] R. Avdeev, S. Cupit-Foutou, *On the irreducible components of moduli schemes for affine spherical varieties*, preprint, 2014, 32 pp.

Готовится к сдаче в печать.

ArXiv: `1406.1713 [math.AG]`

3. Участие в конференциях и школах, доклады на семинарах

1. Две лекции мини-курса «Сферические однородные пространства и сферические многообразия», Четвёртая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», МГУ и НМУ, Москва, 27 января – 1 февраля 2014 г.

2. Доклад «Сферические действия на многообразиях флагов классических групп», семинар «Группы Ли и теория инвариантов», МГУ, Москва, 30 апреля 2014 г.

3. Доклад «Spherical actions on generalized flag varieties», Seminar in Algebra, Lie Theory, and Geometry, Jacobs University, Бремен, Германия, 14 ноября 2014 г.

4. Доклад «On the irreducible components of moduli schemes for affine spherical varieties», Emmy-Noether-Seminar, Emmy-Noether Zentrum, Эрланген, Германия, 5 декабря 2014 г.

5. Доклад «Solvable spherical subgroups in reductive algebraic groups», Oberseminar Lie-Theorie, Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Падерборн, Германия, 11 декабря 2014 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Занимался научной работой в Математическом институте Макса Планка (Бонн, Германия) с 1 сентября по 31 декабря 2014 года.

5. Педагогическая деятельность

В весеннем семестре 2013/2014 учебного года вёл уроки математического анализа в 9-м математическом классе школы № 179 МИОО.

Летом 2014 года участвовал в работе двух смен (11–25 июня и 11–25 августа) летней многопредметной школы «Алые паруса» (Костромская область) для школьников в качестве преподавателя математики.