Отчёт по гранту фонда «Династия» за 2015 год

Авдеев Роман Сергеевич

1. Результаты, полученные в 2015 году

В этом году изучались пространства модулей аффинных сферических многообразий с фиксированной полугруппой старших весов.

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ нулевой характеристики. Всякое G-многообразие (то есть алгебраическое многообразие, снабжённое регулярным действием группы G), обладающее плотной (а значит, открытой) орбитой для индуцированного действия борелевской подгруппы $B \subset G$, называется *сферическим*. В частном случае, когда G — тор, сферические G-многообразия хорошо известны под названием *торические многообразия*.

Согласно известному результату Винберга и Кимельфельда 1978 года, неприводимое аффинное G-многообразие является сферическим тогда и только тогда, когда естественное представление группы G в пространстве $\Bbbk[X]$ регулярных функций на X имеет *простой спектр*, то есть всякое неприводимое представление группы G входит в $\Bbbk[X]$ с кратностью не выше 1. Важнейшим инвариантом аффинного сферического G-многообразия X является его *полугруппа старших весов* Γ_X, состоящая из тех доминантных весов группы G, для которых $\Bbbk[X]$ содержит неприводимое представление группы G со старшим весом λ.

Ещё один инвариант аффинного сферического G-многообразия X происходит из кольцевой структуры алгебры $\Bbbk[X]$. Для каждого $\lambda \in \Gamma_X$ обозначим через $\Bbbk[X]_\lambda$ подпространство в $\Bbbk[X]$, в котором реализуется неприводимое представление группы G со старшим весом λ. Обозначим через Ξ_X полугруппу, порождённую всеми элементами вида $\lambda+\mu-\nu$, для которых $\Bbbk[X]_\lambda \cdot \Bbbk[X]_\mu \supset \Bbbk[X]_\nu$. Полугруппа Ξ_X называется *корневой полугруппой* многообразия X. В 1996 году Кноп доказал, что насыщение Ξ_X^{sat} полугруппы Ξ_X (то есть полугруппа, равная пересечению группы, порождённой Ξ_X, и выпуклого конуса, натянутого на Ξ_X) свободно. Обозначим через Σ_X (конечный) базис полугруппы Ξ_X^{sat}.

Пусть Γ — произвольная подполугруппа полугруппы старших весов группы G. Зафиксируем максимальный тор $T \subset G$ и обозначим через T_{ad} соответствующий *присоединённый тор*, то есть факторгруппу тора T по центру группы G. В 2005 году Алексеев и Брион построили аффинную схему M_Γ конечного типа, снабжённую действием группы T_{ad} и обладающую следующими свойствами:

(1) T_{ad}-орбиты в M_Γ находятся в биекции с аффинными сферическими G-многообразиями (рассматриваемыми с точностью до G-эквивариантного изоморфизма) с полугруппой старших весов Γ;

(2) M_Γ содержит единственную T_{ad}-неподвижную замкнутую точку (обозначим её через X_0);

(3) для всякого аффинного сферического G-многообразия X с условием $\Gamma_X = \Gamma$ замыкание соответствующей T_{ad}-орбиты в M_Γ является аффинным торическим T_{ad}-многообразием с полугруппой старших весов Ξ_X.

Схема M_Γ называется *пространством модулей аффинных сферических G-многообразий с полугруппой старших весов* Γ.

В нашем совместном проекте со Ст. Кюпи́т-Футу́ (S. Cupit-Foutou) изучается пространство M_Γ в предположении, что полугруппа Γ *насыщенна* (то есть является пересечением решётки с конечно порождённым выпуклым конусом). На геометрическом языке условие насыщенности Γ означает, что всякое аффинное сферическое G-многообразие с $\Gamma_X = \Gamma$ является нормальным.

В начале 2015 года мы занимались ревизией и подготовкой к сдаче в печать нашего препринта “On the irreducible components of moduli schemes for affine spherical varieties” (`arXiv:1406.1713v2`), включавшего помимо прочего следующие результаты:

(R1) полное описание структуры T_{ad}-модуля в касательном пространстве $T_{X_0}\mathrm{M}_\Gamma$ к M_Γ в T_{ad}-неподвижной точке X_0 в терминах полугруппы Γ;

(R2) для всякого нормального аффинного сферического G-многообразия X его корневая полугруппа Ξ_X совпадает с Ξ_X^{sat} и тем самым свободна.

Содержавшиеся в препринте доказательства результатов (R1) и (R2) опирались на целый ряд известных фактов из теории сферических многообразий. Однако в процессе ревизии стало ясно, что (R1) и (R2) можно доказать, обойдясь значительно меньшим набором используемых средств. А именно, достаточно только базовых фактов о пространстве M_Γ из работы Алексеева и Бриона и упоминавшегося выше результата Кнопа о свободности полугруппы Ξ_X^{sat}. Это привело к переосмыслению и кардинальному изменению идеологии и структуры нашей работы, а также к существенному расширению её содержания. При помощи (R1) нам удалось получить принципиально новые доказательства следующих известных результатов из теории сферических многообразий:

(F1) теорема единственности для нормальных аффинных сферических G-многообразий: с точностью до G-эквивариантного изоморфизма, всякое нормальное аффинное сферическое G-многообразие однозначно определяется парой (Γ_X, Σ_X);

(F2) теорема единственности для сферических однородных пространств (формулировка опущена ввиду её громоздкости);

(F3) с точностью до G-эквивариантного изоморфизма, существует лишь конечное число аффинных сферических G-многообразий с любой наперёд заданной полугруппой старших весов.

Результаты (F1) и (F2) были впервые получены И. Лосевым в 2009 году, а результат (F3) — Алексеевым и Брионом в 2005 году (в той же работе, где было введено пространство M_Γ). Кроме того, нам удалось распространить результат (F1) на произвольные (не обязательно нормальные) аффинные сферические G-многообразия.

Результаты (R1), (R2), а также новые доказательства результатов (F1)–(F3) составили основу статьи [2]. По материалам препринта `arXiv:1406.1713v2`, не вошедшим в [2], готовится отдельная статья.

2. Публикации в 2015 году

[1] R. Avdeev, *Strongly solvable spherical subgroups and their combinatorial invariants*, Selecta Mathematica. New Series **21** (2015), no. 3, 931–993.

DOI: `10.1007/s00029-015-0180-3`

ArXiv: `1212.3256 [math.GR]`

[2] R. Avdeev, S. Cupit-Foutou, *New and old results on spherical varieties via moduli theory*, preprint, 2015, 44 pp.

ArXiv: `1508.00268 [math.AG]`

Сдано в печать.

3. Участие в конференциях и школах, доклады на семинарах

1. Доклад «The moduli scheme of affine spherical varieties with a given weight monoid», Seminar on Algebra, Geometry, and Physics, Max-Planck Institute for Mathematics, Бонн, Германия, 6 января 2015 г.

2. Доклад «The moduli scheme of affine spherical varieties with a given weight monoid», Oberseminar Algebra, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Кёльн, Германия, 13 января 2015 г.

3. Доклад «Пространство модулей аффинных сферических многообразий с фиксированной полугруппой старших весов», семинар «Группы Ли и теория инвариантов», МГУ, Москва, 18 и 25 февраля 2015 г.

4. Доклад «Пространства модулей в теории сферических многообразий», конференция «Встреча поколений», НМУ, Москва, 9–11 июня 2015 г.

5. Доклад «Пространства модулей аффинных сферических многообразий с фиксированной полугруппой старших весов», Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара, 22–27 июня 2015 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Занимался научной работой в Математическом институте Макса Планка (Бонн, Германия) с 1 по 23 января 2015 года.

5. Педагогическая деятельность

В 4-м модуле 2014/2015 учебного года (с апреля по июнь) читал лекции и вёл семинарские занятия по курсу «Алгебра» на 1-м курсе направления «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

В 4-м модуле 2014/2015 учебного года (с апреля по июнь) вёл семинарские занятия по курсу «Теория алгоритмов» на 2-м курсе направления «Фундаментальная информатика и информационные технологии» МИЭМ НИУ ВШЭ.

В 1-2 модулях 2015/2016 учебного года (с сентября по декабрь) читал лекции и вёл семинарские занятия по курсу «Линейная алгебра и геометрия» на 1-м курсе направления «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

На протяжении всего года (за исключением летних каникул) вёл уроки математического анализа в математическом классе школы № 179 МИОО.