Отчёт по гранту фонда «Династия» за 2016 год

Авдеев Роман Сергеевич

1. Результаты, полученные в 2016 году

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ нулевой характеристики, и пусть X — некоторое G-многообразие (то есть алгебраическое многообразие, снабжённое регулярным действием группы G). Действие группы G на X (а также само X) называется *сферическим*, если X содержит плотную (а значит, открытую) орбиту для индуцированного действия борелевской подгруппы $B \subset G$. В частном случае, когда G — тор, сферические G-многообразия хорошо известны под названием *торические многообразия*. В 2016 году исследования велись в трёх независимых направлениях, связанных с различными аспектами теории сферических многообразий.

1.1. Изучение пространства модулей аффинных сферических многообразий с фиксированной полугруппой старших весов. Это совместный проект со Стефани́ Кюпи́т-Футу́ (Stéphanie Cupit-Foutou).

Согласно известному результату Винберга и Кимельфельда 1978 года, неприводимое аффинное G-многообразие является сферическим тогда и только тогда, когда естественное представление группы G в пространстве $\Bbbk[X]$ регулярных функций на X имеет *простой спектр*, то есть всякое неприводимое представление группы G входит в $\Bbbk[X]$ с кратностью не выше 1. Важнейшим инвариантом аффинного сферического G-многообразия X является его *полугруппа старших весов* Γ_X, состоящая из тех доминантных весов группы G, для которых $\Bbbk[X]$ содержит неприводимое представление группы G со старшим весом λ.

Пусть Γ — произвольная подполугруппа полугруппы доминантных весов группы G. Зафиксируем максимальный тор $T \subset G$ и обозначим через T_{ad} соответствующий *присоединённый тор*, то есть факторгруппу тора T по центру группы G. В 2005 году Алексеев и Брион построили аффинную схему M_Γ конечного типа, снабжённую действием группы T_{ad} таким образом, что T_{ad}-орбиты в M_Γ находятся в биекции с аффинными сферическими G-многообразиями (рассматриваемыми с точностью до G-эквивариантного изоморфизма) с полугруппой старших весов Γ. Схема M_Γ называется *пространством модулей аффинных сферических G-многообразий с полугруппой старших весов* Γ.

Мы изучали пространство M_Γ в предположении, что полугруппа Γ *насыщенна* (то есть является пересечением решётки с конечно порождённым выпуклым конусом). На геометрическом языке условие насыщенности Γ означает, что всякое аффинное сферическое G-многообразие с $\Gamma_X = \Gamma$ является нормальным.

Ранее мы получили комбинаторное описание всех T_{ad}-орбит в M_Γ (их всегда конечное число) и отношения включения между ними в терминах полугруппы Γ. Из этого описания легко получается описание всех неприводимых компонент в M_Γ и, в частности, критерий неприводимости пространства M_Γ. Неприводимость пространства M_Γ означает, что среди всех аффинных сферических G-многообразий с полугруппой старших весов Γ можно выделить одно, из которого все остальные получаются посредством специального типа вырождений. Например, как показано Д. Лу́ной в 2007 году, пространство M_Γ неприводимо в случае, когда Γ совпадает с полугруппой всех доминантных весов группы G. Нами было показано, что результат Луны обобщается на случай, когда Γ — произвольная G-*насыщенная* полугруппа, то есть Γ есть множество всех доминантных весов, содержащихся в порождённой ей решётке.

В этом году нами были найдены несколько общих комбинаторных условий на полугруппу Γ, являющихся достаточными для неприводимости (и даже гладкости) пространства M_Γ. В качестве приложения мы показали, что пространство M_Γ неприводимо и гладко в том случае, когда среди всех аффинных сферических G-многообразий с полугруппой старших весов Γ имеется многообразие с факториальной алгеброй регулярных функций. Как следствие отсюда получается, что все аффинные сферические G-многообразия, полугруппа старших весов которых совпадает с полугруппой старших весов некоторого сферического G-модуля, являются вырождениями этого модуля. Последнее утверждение было доказано ранее в работах Пападакиса и Ван Стейртегхема посредством перебора, основанного на известной классификации всех сферических G-модулей.

Наконец, с помощью развитой нами комбинаторики удалось построить новые примеры пространств M_Γ, являющихся неприведёнными точками.

По упомянутым выше результатам (полученным как ранее, так и в этом году) подготовлена и сдана в печать статья [1].

1.2. Правила ветвления, связанные со сферическими действиями на многообразиях флагов. Содержание этого раздела относится к совместной деятельности с Алексеем Петуховым.

Обобщённым многообразием флагов (или просто *многообразием флагов*) называется всякое однородное пространство вида G/P, где G — связная редуктивная алгебраическая группа, а P — её параболическая подгруппа. Все многообразия флагов фиксированной группы G суть в точности все её полные (а также все проективные) однородные пространства. В силу разложения Брюа всякое многообразие флагов G/P является сферическим относительно естественного действия группы G левыми сдвигами.

Из общей теории сферических многообразий вытекает, что для связной редуктивной подгруппы $K \subset G$ следующие условия эквивалентны:

(а) K действует сферично на G/P;

(б) для всякого неприводимого представления R группы G, реализующегося в пространстве глобальных сечений некоторого линейного расслоения на G/P, ограничение представления R на подгруппу K имеет простой спектр.

Оказывается, что при выполнении этих эквивалентных условий правила ветвления для вообще всех неприводимых представлений группы G, реализующихся в пространствах глобальных сечений линейных расслоений на G/P, кодируются одной свободной полугруппой конечного ранга (мы её называем *полугруппой ветвления*). В этой связи естественной задачей является вычисление полугрупп ветвления для всех сферических действий на многообразиях флагов.

К настоящему моменту сферические действия на многообразиях флагов классифицированы (в основном) в следующих трёх случаях:

(1) K — подгруппа Леви в G;

(2) K — симметрическая подгруппа в G;

(3) $G = \mathrm{GL}_n$.

Описание полугрупп ветвления в случае (1) легко следует из результатов диссертации Е. В. Пономарёвой от 2015 г. В нашей работе мы вычислили все полугруппы ветвления в случаях (2) и (3). В каждом конкретном случае основную сложность представляет вычисление ранга полугруппы ветвления, который равен числу K-инвариантных простых дивизоров в G/P. Если же ранг полугруппы известен, то нахождение всех её неразложимых элементов является гораздо более простой задачей.

По упомянутым в этом разделе результатам готовится статья.

1.3. Вычисление комбинаторных инвариантов сферических подгрупп. Пусть $H \subset G$ — сферическая подгруппа (то есть однородное пространство G/H является сферическим относительно действия группы G левыми сдвигами). Предположим, что H стандартно вложена в некоторую параболическую подгруппу $P \subset G$, то есть зафиксированы такие разложения Леви $P = L \leftthreetimes P^u$ и $H = K \leftthreetimes H^u$, что $K \subset L$ и $H^u \subset P^u$ (этого всегда можно добиться, заменяя группу H сопряжённой). Далее, зафиксируем в G борелевскую подгруппу B, противоположную к P; тогда $B_L = B \cap L$ — борелевская подгруппа в L.

В описанной выше ситуации представляет большой интерес задача вычисления следующих комбинаторных инвариантов однородного пространства G/H:

– множества $\Sigma_{G/H}$ сферических корней;

– расширенной полугруппы старших весов $\widehat{\Lambda}^+_{G/H}$.

В этом году на решение данной задачи были потрачены некоторые усилия, однако никаких законченных результатов получить не удалось. Тем не менее, анализ ситуации привёл к переосмыслению трудностей, возникающих на пути решения, и позволил сформулировать следующие две гипотезы:

(1) для вычисления обоих инвариантов достаточно информации о том, какие B_L-инвариантные простые дивизоры в P/H инвариантны относительно действия отрицательных корневых подгрупп в P, отвечающих простым корням, не принадлежащим системе корней группы L;

(2) инвариантность заданного B_L-инвариантного простого дивизора в P/H относительно действия заданной отрицательной корневой подгруппы в P эквивалентна выполнению некоторого простого комбинаторного условия, легко проверяемого в каждом конкретном случае.

В дальнейшем планируется продолжить исследования в данном направлении.

2. Публикации в 2016 году

[1] R. Avdeev, S. Cupit-Foutou, *On the irreducible components of moduli schemes for affine spherical varieties*, preprint, 2016, 25 pp.

ArXiv: `1406.1713v3 [math.AG]`

Сдано в печать.

3. Участие в конференциях и школах

1. Участие в конференции «Sphericity 2016» (21–27 февраля 2016 г., Kloster Reute, Германия), на которой моя соавтор Stéphanie Cupit-Foutou выступала с докладом «Moduli spaces of spherical varieties» по нашей с ней совместной работе.

2. Доклад «Affine spherical varieties and beyond via moduli theory», International conference on spherical varieties, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Санья, Китай, 7–11 ноября 2016 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах

В этом году не было.

5. Педагогическая деятельность

В 3-4 модулях 2015/2016 учебного года (с января по июнь) читал лекции и вёл семинарские занятия по курсу «Линейная алгебра и геометрия» на 1-м курсе образовательной программы бакалавриата «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

В 4-м модуле 2015/2016 учебного года (с апреля по июнь) читал лекции и вёл семинарские занятия по курсу «Алгебра» на 1-м курсе образовательной программы бакалавриата «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

В 1-2 модулях 2016/2017 учебного года (с сентября по декабрь) читал лекции и вёл семинарские занятия по курсу «Линейная алгебра и геометрия» на 1-м курсе образовательной программы бакалавриата «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

С октября по декабрь вёл занятия по курсу «Алгебра и математическая логика» на программе «Прикладная математика и информатика» подготовительного отделения магистратуры НИУ ВШЭ.

С января по май вёл уроки математического анализа в 11-м математическом классе школы № 179 МИОО.

В 2015/2016 учебном году (с января по июнь) руководил четырьмя курсовыми работами студентов 2-3 курса образовательной программы бакалавриата «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

В 2016/2017 учебном году (с сентября по декабрь) руководил одной выпускной квалификационной работой студентки 4 курса образовательной программы бакалавриата «Прикладная математика и информатика» факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ.

6. Итоги трёх лет и сравнение с исходной заявкой

Исходная заявка была посвящена исследованию нормальных форм сферических подгрупп и нахождению связей между ними и известной комбинаторной классификацией сферических подгрупп (в терминах так называемых *инвариантов Лу́ны*). Ставились следующие основные задачи:

(1) найти набор комбинаторных данных, однозначно определяющий нормальную форму сферической подгруппы;

(2) найти нормальную форму сферической подгруппы, соответствующей заданному набору инвариантов Луны;

(3) имея сферическую подгруппу, заданную своей нормальной формой, вычислить её инварианты Луны.

Постановка задач (1)–(3) для общего случая была мотивирована успехом их полного решения для широкого класса сферических подгрупп — разрешимых, — достигнутым в предыдущих работах автора.

Ещё до начала реализации плана было ясно, что концептуальный подход к решению задачи (1) в разрешимом случае не допускает полного обобщения на случай произвольных сферических подгрупп, однако предполагалось, что поставленной цели можно добиться, сведя рассмотрение к перебору некоторого конечного числа случаев. К сожалению, число подлежащих перебору случаев оказалось слишком велико, в связи с чем решение задачи (1) пришлось отложить до лучших времён.

Задачу (2) изначально предполагалось решать на базе результатов решения задачи (1): если нормальная форма сферической подгруппы однозначно определяется некоторым набором комбинаторных данных (и явно по нему строится), то была надежда суметь найти этот набор комбинаторных данных, исходя из инвариантов Луны заданной подгруппы. Так как решить задачу (1) не удалось, то предполагавшийся подход к решению задачи (2) оказался нереализуем.

По задаче (3) за три года были некоторые продвижения, упомянутые в пункте 1.3 отчёта за 2014 год и пункте 1.3 этого отчёта. Несмотря на то, что в этом направлении не удалось получить никаких законченных результатов, придуманы новые идеи и созданы новые инструменты вычисления инвариантов Луны сферических подгрупп. Более того, складывается ощущение, что этих инструментов будет достаточно в каждом конкретном примере. В дальнейшем планируется продолжить эти исследования и добиться результатов.

Помимо отражённой в заявке тематики, за прошедшие три года автор принимал участие в следующих двух проектах:

- исследование пространства модулей аффинных сферических многообразий с фиксированной полугруппой старших весов (совместно со Stéphanie Cupit-Foutou);
- классификация сферических действий на многообразиях флагов и нахождение соответствующих им полугрупп ветвления (совместно с Алексеем Петуховым).

По первому из этих проектов удалось получить ряд интересных результатов, были написаны две статьи `arXiv:1508.00268 [math.AG]` и `arXiv:1406.1713v3 [math.AG]`.

Второй проект оказался очень обширным, по нему опубликована одна статья `arXiv:1401.1777 [math.AG]`, готовится к печати ещё одна, а в дальнейшем планируется продолжить работу.