Отчет за 2014 год
по гранту фонда "Династия"для молодых математиков
Баранова Антона Дмитриевича

1. Результаты, полученные в 2014 году

Напомним, что каноническая система – это система линейных дифференциальных уравнений (порядка 2) на отрезке $[0, L]$, параметром которой служит неотрицательная матричнозначная функция H (гамильтониан). Знаменитая обратная спектральная теорема де Бранжа устанавливает взаимно-однозначное соответствие между гамильтонианами (или спектральными мерами) и специальными пространствами целых функций (пространствами де Бранжа). Проект направлен на выяснение малоизученных тонких свойств этого соответствия.

В соответствии с планом исследований, в 2014 году велась работа в двух направлениях:

- Локализация нулей и свойства гамильтонианов.
- Устойчивость характеристик роста пространств целых функций де Бранжа при малых возмущениях гамильтониана или спектральной меры.

Первая из этих задач состояла в исследовании свойства локализации нулей в пространствах целых функций де Бранжа (или в связанных с ними пространствах преобразований Коши дискретных мер). Нас интересовало следующее свойство: при каких условия на меру μ (дискретная мера на прямой) нули любого нетривиального преобразования Коши $\int \frac{f(t)}{t-z} d\mu(t)$, $f \in L^2(\mu)$, локализованы вблизи носителя меры μ, то есть все нули кроме, возможно, конечного числа содержатся в объединении попарно дизъюнктных шаров с центрами в точках из $\operatorname{supp}\mu$. Эта задача полностью решена с статье [1]. Во-первых, показано, что так называемая "сильная локализация" (то есть свойство, что в окрестности каждой точки из $\operatorname{supp}\mu$ у любого нетривиального преобразования Коши есть нуль) равносильна свойству полноты полиномов в $L^2(\mu)$ [1, Th. 1.4]. Более сложные типы локализации описаны в [1, Th. 1.8].

Главный результат в этой задаче – то, что получено полное описание гамильтонианов, отвечающих пространствам со свойством локализации. Это один из очень редких случаев, когда удается найти взаимно-однозначное соответствие между свойствами гамильтонинана и внутренними свойствами связанных с ним пространств де Бранжа. Гамильтонианы в указанном случае оказываются в определенном смысле дискретными (постоянные вырожденные матрицы на счетном семействе интервалов полной меры в $[0, L]$, называемых неделимыми интервалами).

Теорема. *Пространство де Бранжа обладает свойством локализации в том и только том случае, когда отвечающия ему гамильтониан задан на системе неделимых интервалов, накапливающихся только влево (в том смысле, что любая точка отрезка $[0, L]$ является либо внутренней точкой, либо правым концом некоторого неделимого интервала).*

Статья, посвященная проблеме локализации (совместно с Е. Абакумовым и Ю. Беловым) принята к печати в журнал International Mathematics Research Notices.

Вторая задача проекта, рассматривавшаяся в этом году, состояла в том, чтобы найти условия на малость возмущений спектральной меры μ, достаточные для сохранения порядка и типа пространств де Бранжа, связанных с канонической системой (то есть цепочек пространств $\{\mathcal{H}(E_t)\}_{0<t<L}$, изометрически вложенных и заполняющих пространство $L^2(\mu)$). В частности предполагалось распространить одну теорему Боричева–Содина об устойчивости экспоненциального типа меры на случай произвольных цепочек пространств де Бранжа. Боричев и Содин рассматривали экспоненциально малые (порядка $e^{-\delta|x|}$, $\delta > 0$) возмущения меры. При этом допускались и экспоненциально малые возмущения плотности или масс, и экспоненциально малые движения носителя меры. В этом направлении доказана следующая теорема (совместно с Х. Ворачеком и Р. Романовым).

Теорема. *Пусть μ и $\tilde{\mu}$ – две меры на $\mathbb{R}$, экспоненциально близкие в смысле условия Боричева–Содина, и пусть $\{\mathcal{H}(E_t)\}_{0<t<L}$ и $\{\mathcal{H}(\tilde{E}_s)\}_{0<s<\tilde{L}}$ – соответствующие изометрически вложенные цепочки пространств де Бранжа. Тогда для всякого $s \in (0, \tilde{L})$ найдутся такие $t_1, t_2 \in (0, L)$, что $\mathcal{H}(E_{t_1}) \subset \mathcal{H}(\tilde{E}_s) \subset \mathcal{H}(E_{t_2})$. В частности, характеристики роста пространств $\mathcal{H}(E_t)$ и $\mathcal{H}(\tilde{E}_s)$ совпадают.*

Эти результаты готовятся к печати.

Упомянем еще один результат, не связанный напрямую с проектом исследований, но также посвященный геометрии одного класса пространств де Бранжа, совпадающих (с эквивалентностью норм) с пространствами типа Фока с медленно растущими весами. Для этого класса пространств получено полное описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер. Это описание формулируется в терминах отклонений от некоторой известной полной интерполяционной последовательности и напоминает известную теорему Ингэма–Кадеца об 1/4 для пространств Пэли–Винера (или для базисов из экспонент на отрезке). Однако, в отличие от пространств Пэли–Винера, возможно дать полное описание в терминах возмущений. При этом имеется прямая связь между базисами Рисса из ядер в гильбертовом случае и описанием полных интерполяционных последовательностей для пространства Фока с соответствующей равномерной нормой. Как следствие этих результатов показано, что последовательность, плотность которой отличается от критической, либо содержит полную интерполяционную последовательность, либо может быть дополнена до полной интерполяционной последовательности. В частности, это позволяет дать критерии интерполяции и самплинга в терминах плотностей. Это совместная работа с А. Хартманном и К. Келле (университет Бордо 1, Франция), принятая к печати в известный французский журнал Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

[1] E. Abakumov, A. Baranov, Yu. Belov, Localization of Zeros for Cauchy Transforms, принято к печати в *International Mathematics Research Notices*, http://imrn.oxfordjournals.org/content/early/2014/09/10/imrn.rnu142.refs

[2] A. Baranov, R. Zarouf, A model space approach to some classical inequalities for rational functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **418** (2014), no. 1, pp. 121-141.

[3] A. Baranov, A. Dumont, A. Hartmann, K. Kellay, Sampling, interpolation and Riesz bases in the small Fock spaces, принято к печати в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021782414001615

[4] A.D. Baranov, K.Yu. Fedorovskiy, On L^1-estimates of derivatives of univalent rational functions, принято к печати в *Journal d'Analyse Mathematique.*

[5] A.D. Baranov, D.V. Yakubovich, One-dimensional perturbations of unbounded selfadjoint operators with empty spectrum, принято к печати в *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*

[6] Anton Baranov, Andrei Lishanskii, On S. Grivaux' example of a hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator, принято к печати в *Archiv der Mathematik.*

3. Участие в конференциях и школах

Выступал с докладами на следующих конференциях:

- 6th St. Petersburg Conference in Spectral Theory,
  Международный институт Эйлера, Санкт-Петербург, 3–8 июля 2014,
  доклад "Spectral theory of rank one perturbations of selfadjoint operators" (приглашенный доклад, 50 минут).
- International Workshop in Operator Theory and Applications (IWOTA 2014),
  Свободный университет (VU University), Амстердам, 14–18 июля 2014,
  доклад "Strong M-bases of reproducing kernels and spectral theory of rank-one perturbations of selfadjoint operators" (приглашенный секционный доклад, 25 минут).
- Function Spaces and Harmonic Analysis,
  Centre International de Rencontres Mathématiques, Марсель, Франция, 27–31 октября 2014,
  http://feichtingertorresani.weebly.com/program–schedule.html,
  доклад "Strong M-bases of reproducing kernels and spectral theory of rank-one perturbations of selfadjoint operators" (приглашенный доклад, 45 минут).

Также выступил с докладом "Functional models and S. Grivaux' example of a hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator" на семинаре по анализу Университета Париж 6, Институт математики Жюссье, Франция (6 марта 2014 года).

Принимал участие (как член научного и организационного комитетов) в организации международной конференции "Complex Analysis and Related Topics"("Комплексный анализ и смежные вопросы"), 14 – 18 апреля 2014 года, http://en.chebyshev.spb.ru/analysis_conference/

4. Педагогическая деятельность

Прочитан курс "Функциональный анализ", Санкт-Петербургский государственный университет, весенний и осенний семестры. Руковожу спецсеминаром "Дополнительные главы комплексного анализа", Санкт-Петербургский государственный университет, осенний семестр. Руководство двумя аспирантами (СПбГУ).