Отчет за 2015 год
по гранту фонда "Династия"для молодых математиков
Баранова Антона Дмитриевича

1. Результаты, полученные в 2015 году

В 2015 году получено значительное продвижение в задаче об устойчивости характеристик роста пространств целых функций де Бранжа при малых возмущениях спектральной меры. Ранее, в совместной работе с Х. Ворачеком (Венский Технический Университет) были получены результаты об устойчивости экспоненциального типа цепочек пространств де Бранжа относительно экспоненциально малых возмущений, введенных А. Боричевы и М. Содиным (2011). В 2015 году этот результат был распространен на случай произвольного субэкспоненциального роста.

Сформулируем точное утверждение. Пусть λ_1, λ_2 две функции роста, μ, $\tilde{\mu}$ – меры на $\mathbb{R}$. Мы говорим, что мера μ мажорирует меру $\tilde{\mu}$ относительно λ_1, λ_2, если существуют константы, $c_0, c_2 \geq 0$, $c_1 \geq 1$ такие что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\mu}\big((x - e^{-\lambda_1(|x|)}, x + e^{-\lambda_1(|x|)})\big) \leq c_0\mu\big((x - c_1e^{-\lambda_1(|x|)}, x + c_1e^{-\lambda_1(|x|)})\big) + c_2e^{-\lambda_2(|x|)}.$$

Теорема. *Пусть μ и $\tilde{\mu}$ – две меры на $\mathbb{R}$, и пусть $\{\mathcal{H}_t\}_{0<t<L}$ и $\{\widetilde{\mathcal{H}}_s\}_{0<s<\tilde{L}}$ – соответствующие изометрически вложенные цепочки пространств де Бранжа. Предположим, что все пространства $\mathcal{H}_t$ имеют конечный тип σ относительно приближенного порядка λ. Далее, предположим, что мера μ мажорирует меру $\tilde{\mu}$ относительно функций роста $\lambda_1 = 2\sigma'\lambda$, где $\sigma' > \sigma$, и $\lambda_2 = 2\lambda_1$. Тогда либо объединение всех пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_s$ всюду плотно в $L^2(\mu)$, либо среди пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_s$ есть пространства, не имеющие тип σ относительно λ.*

Как следствие этого результата мы заключаем, что если обе цепочки пространств де Бранжа имеют тип не выше σ относительно λ, а меры μ и $\tilde{\mu}$ взаимно мажорируют друг друга (для выбранных выше λ_2, λ_2), то цепочки подпространств совпадают как множества. Эти результаты обобщают теорему Боричева и Содина (Advances in Math., 2011) об устойчивости экспоненциального типа (случай $\lambda(r) = r$).

Препринт, содержащий эти результаты, будет размещен на arxiv.org в течение января.

Еще один результат 2015 года относится к применению теории пространств де Бранжа к исследованию спектральных свойств одномерных возмущений самосопряженных или нормальных операторов. В совместной работе с Д.В. Якубовичем (Автономный университет Мадрида) построена функциональная модель для одномерных возмущений нормальных операторов (как ограниченных, так и неограниченных), обобщающая построенную нами ранее модель одномерных возмущений самосопряженных и унитарных операторов. Эта модель была применена к исследованию вопроса о полноте одномерных возмущений в случае, когда невозмущенный оператор имеет лакунарный спектр. Показано, что возмущение может быть неполным только в случае обращения в нуль определенных моментных последовательностей, и что этот результат перестает быть верным на более "густых" спектрах. Работа принята к печати в Journal of Spectral Theory.

Приведем точную формулировку. Пусть A – компактный нормальный оператор с тривиальным ядром в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то есть $A = \sum_n s_n P_n$, где $s_n \neq 0$, $s_n \to 0$, а P_n – конечномерные спектральные проекторы. Рассмотрим его одномерное возмущение $Lx = Ax + \langle x, b\rangle\, a$, $a, b \in H$. Рассмотрим следующие равенства для моментов:

$$\sum_n s_n^{-1} \langle P_n a, b\rangle = -1, \qquad (\mathrm{M}_1)$$

$$\sum_n s_n^{-k} \langle P_n a, b\rangle = 0, \qquad (\mathrm{M}_k)$$

$k = 2, 3, \ldots$. Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пусть L – одномерное возмущение компактного нормального оператора A, спектр которого лакунарен (то есть последовательность $1/s_n$ лакунарна по Адамару). Тогда либо собственные и корневые векторы оператора L полны с точностью до одномерного возмущения, либо равенства (M_k) справедливы для всех $k \geq 1$.*

2. Опубликованные и поданные в печать работы

[1] E. Abakumov, A. Baranov, Yu. Belov, Localization of Zeros for Cauchy Transforms, *International Mathematics Research Notices*, **2015** (2015), 15, 6699–6733.

[2] A. Baranov, A. Dumont, A. Hartmann, K. Kellay, Sampling, interpolation and Riesz bases in the small Fock spaces, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **103** (2015), 6, 1358–1389.

[3] A.D. Baranov, D.V. Yakubovich, One-dimensional perturbations of unbounded selfadjoint operators with empty spectrum, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **424** (2015), 2, 1404–1424.

[4] Anton Baranov, Andrei Lishanskii, On S. Grivaux' example of a hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator, *Archiv der Mathematik*, **104** (2015), 3, 223–235.

[5] A.D. Baranov, D.V. Yakubovich, Completeness of rank one perturbations of normal operators with lacunary spectrum, принято к печати в *Journal of Spectral Theory.*

[6] A. Baranov, A. Lishanskii, Hypercyclic Toeplitz operators, принято к печати в *Results in Mathematics.*

3. Участие в конференциях и школах

Выступал с докладами на следующих конференциях:

- Conference on Harmonic and Functional Analysis, Operator Theory and Applications.
  IMB, Université de Bordeaux, 1–4 июня 2015,
  доклад "Hypercyclic Toeplitz operators" (секционный доклад, 25 минут).

- Recent trends in Operator Theory and Function Theory
  Университет Лилля, Франция, 8–12 июня 2015,
  доклад "Spectral synthesis in the space of infinitely differentiable functions" (приглашенный пленарный доклад, 60 минут).
- North British Functional Analysis Seminar (NBFAS)
  Университет Ньюкасла, Великобритания, 9–10 октября 2015, "Spectral theory of rank one perturbations of compact self-adjoint operators" (приглашенный миникурс, 2 часа)
- Journees du GDR Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilites
  Международный центр математических исследований Люмини, Марсель, Франция, 30 ноября – 4 декабря 2015,
  "A short proof of the Gap Theorem for separated sequences" (приглашенный доклад, 40 минут).

Принимал участие (как член организационного комитета) в организации международной школы-конференции "Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals (SAFSI2015)", 12–15 октября 2015 года, http://www.chebyshev.spb.ru/safsi2015/

4. Педагогическая деятельность

Прочитан курс "Функциональный анализ", Санкт-Петербургский государственный университет, весенний и осенний семестры. Руковожу спецсеминаром "Дополнительные главы комплексного анализа", Санкт-Петербургский государственный университет, осенний семестр. Руководство двумя аспирантами (СПбГУ).